5

notas de física ifgw

Curso de Eletrodinâmica de Weber

André Koch Torres Assis

Wilhelm Weber

1992

NOTAS DE FÍSICA JÁ PUBLICADAS:

1 - **Funções de Green**
por José Bellandi Filho (1992)

2 - **Propriedades Ópticas de Semicondutores: Uma Introdução**
por Fernando Cerdeira & Colaboradores (1992)

3 - **Fenômenos Ultrarápidos: Geração de Pulsos Laser Ultracurtos e Aplicações**
por Carlos H. de Brito Cruz e Hugo L. Fragnito (1992)

4 - **Caos em Sistemas Hamiltonianos**
por Marcus A.M. de Aguiar (1992)

publicado em Setembro de 1992 pelo

Instituto de Física *"GLEB WATAGHIN"*
Setor de Publicações
Universidade Estadual de Campinas - **UNICAMP**
Cidade Universitária - Caixa Postal 6165
13081 - Campinas - SP

Antonio Trigueiros - Responsável por esta edição.

CURSO DE
ELETRODINÂMICA DE WEBER

André Koch Torres Assis*, †

Departmento de Raios Cósmicos e Cronologia

Instituto de Física

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Caixa Postal 6165

13081 Campinas, SP, Brasil

Wilhelm Weber

* Também Professor Colaborador do Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, Brasil.

ÍNDICE

PREFÁCIO

"Grande progresso tem sido feito na ciência elétrica, principalmente na Alemanha, pelos cultivadores da teoria de ação à distância. As valiosas medições elétricas de W. Weber são interpretadas por ele de acordo com sua teoria, e a especulação eletromagnética que foi originada por Gauss, e continuada por Weber, Riemann, J. [F.] e C. Neumann, [L.] Lorenz, etc., está baseada na teoria de ação à distância, mas dependendo ou diretamente da velocidade relativa das partículas, ou da propagação gradual de alguma coisa, seja potencial ou força, de uma partícula à outra. O grande sucesso obtido por estes homens eminentes na aplicação da matemática aos fenômenos elétricos, fornece, como é natural, peso adicional às suas especulações teóricas, de tal forma que aqueles que, como estudantes da eletricidade, se voltam em direção a eles como as maiores autoridades na eletricidade matemática, provavelmente assimilariam, junto com seus métodos matemáticos, suas hipóteses físicas.

Estas hipóteses físicas, contudo, são completamente diferentes da maneira do olhar os fenômenos que eu adoto, e um dos objetivos que tenho em vista é que alguns daqueles que desejam estudar eletricidade podem, ao ler este tratado, ver que há uma outra maneira de tratar o assunto, que não é menos apta a explicar os fenômenos, e que, apesar de que em algumas partes ela possa parecer menos definida, corresponde, como penso, mais fielmente com nosso conhecimento atual, tanto naquilo que afirma quanto naquilo que deixa indeciso.

De um ponto de vista filosófico, além disto, é extremamente importante que os dois métodos sejam comparados, ambos os quais tiveram sucesso na explicação dos principais fenômenos eletromagnéticos, e ambos os quais tentaram explicar a propagação da luz como um fenômeno eletromagnético e de fato calcularam sua velocidade, enquanto que ao mesmo tempo as concepções fundamentais sobre o que de fato acontece, assim como a maioria das concepções secundárias das quantidades envolvidas, são radicalmente diferentes."

Estas são as palavras de James Clerk Maxwell, no Prefácio de sua obra máxima, *A Treatise on Electricity and Magnetism.* Como se pode ver deste trecho, Maxwell via uma diferença conceitual entre suas concepções, derivadas em grande parte das de Faraday; e as de Gauss e Weber, entre outros. Maxwell reconhece que ambas as formulações são compatíveis com os principais fenômenos do eletromagnetismo, e que é extremamente importante comparar os dois métodos.

E é justamente dentro deste espírito geral que se encontra o objetivo deste livro. Nossa intenção básica é apresentar de maneira razoavemente completa a Eletrodinâmica de Weber. Como Maxwell afirmou e mostrou mais de uma vez, a lei de Weber é compatível com as equações de Maxwell (leis de Gauss, Ampère e Faraday), e só difere das concepções de Maxwell em aspectos filosóficos. Mostramos no decorrer do trabalho como se derivam as equações de Maxwell a partir da força de Weber.

A admiração de Maxwell pelo trabalho de Weber também pode ser vista observando-se que Maxwell dedicou todo o último capítulo de seu livro mais importante a apresentar a eletrodinâmica de Weber e a mostrar sua compatibilidade com os principais fatos conhecidos do eletromagnetismo.

Este livro destina-se a estudantes dos últimos dois anos de um curso de graduação em física, engenharia ou matemática; ou ainda a estudantes destes cursos que estejam nos dois primeiros anos da pós-graduação e que ainda não tenham se familiarizado com o assunto. Este trabalho visa a ser completo no sentido de que não se requer nenhum conhecimento prévio da lei de Weber para segui-lo. Para que o estudante possa acompanhar o curso são necessários como pré-requisitos na área de matemática que ele já tenha cursado uma disciplina de cálculo diferencial e integral, e uma de análise vetorial (incluindo os teoremas de Gauss e de Stokes). Na área de física já deve ter cursado mecânica e eletromagnetismo ao nível de ciclo básico, e que já tenha cursado ou esteja cursando os cursos intermediários ao nível de um Symon, Reitz e Milford, Lorrain e Corson, ou Panofsky e Phillips.

Este livro está preparado para um curso de um semestre, e com este objetivo foram incluídos exercícios ao final de cada capítulo. É fundamental que o estudante resolva detalhadamente cada um destes exercícios já que esta é uma parte integral e essencial do curso.

O assunto do livro se encaixa dentro da física clássica, por este motivo não tratamos aqui da mecânica quântica ou da teoria da relatividade de Einstein. Um aprofundamento em qualquer destes assuntos está além dos objetivos deste trabalho.

Foi incluída uma bibliografia ampla no fim do livro para permitir um aprofundamento maior aos estudantes mais interessados. Pode-se usar estas referências recentes como sugestão de tópicos de pesquisa ou de trabalho aos estudantes de pós-graduação. No texto a bibliografia é indicada pelo sobrenome do autor e ano de publicação. Exemplo: (Edwards, Kenyon e Lemon, 1976). As referências estão completas (com ano, volume, página e título do artigo) para incentivar os leitores a procurarem e estudarem os originais. Ganha-se muita coisa com isto e muitas vezes os artigos originais são facilmente encontrados em bibliotecas universitárias com um bom acervo.

Na medida do possível acrescentamos informações históricas relevantes no corpo do texto. O objetivo é dar o contexto histórico de algumas descobertas e fazer uma análise crítica de alguns tópicos. A fonte para a maior parte destas informações foram os artigos originais e os excelentes livros de Whittaker (*A History of the Theories of Aether and Electricity*), O'Rahilly (*Electromagnetic Theory* - A Critical Examination of Fundamentals) e Mach (*The Principles of Physical Optics* - An Historical and Philosophical Treatment). Sugerimos fortemente um estudo atento destes três livros a todos que queiram aprofundar de maneira consciente e crítica os seus conceitos nesta área fundamental da ciência.

Em todo o livro usamos o Sistema Internacional de Unidades. Quando definimos alguma grandeza usamos "$\equiv$" como símbolo de definição.

Agradecimentos: Aos alunos da graduação e da pós-graduação que seguiram este curso, pelas críticas construtivas que apresentaram nas vezes em que este curso foi ministrado. Ao Centro Acadêmico da Física da UNICAMP por ter me convidado a ministrar este curso durante o "I Curso de Inverno" (1990). Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) de São José dos Campos, por ter me convidado a ministrar este curso no INPE em 1991. Aos Drs. Peter e Neal Graneau, James Paul Wesley, Thomas E. Phipps Jr., P. T. Pappas, Domina E. Spencer, Gerald Pellegrini, Cynthia K.

Whitney, Ralph Sansbury, Julian B. Barbour, Harvey R. Brown, C. Roy Keys, Svetlana Tolchelnikova-Murri, Reginald I. Gray, Umberto Bartocci, Roberto Monti, Roberto de A. Martins, Cesar Lattes, Roberto Clemente, Marcio J. Menon, Waldyr A. Rodrigues Jr., Wilson de C. Ferreira, Adolfo Maia Jr., Erasmo Recami, Edmundo C. de Oliveira, Vincent Buonomano, Iberê L. Caldas, Álvaro Vannucci, Haroldo Campos Velho, Thyrso Villela, Hector R. T. Silva, Ruy H. do A. Farias, Marcos C. D. Neves, Werner M. Vieira, Paulo Magno Garcia, Durval C. Jacinto, e a todos aqueles que leram uma primeira versão deste livro e que me ajudaram com suas idéias e sugestões. Aos estudantes que estão desenvolvendo pesquisas nesta área, e especialmente a: Dario S. Thober, Marcelo de A. Bueno, João José Caluzi, Fábio M. Peixoto, e Luis A. C. Henriques.

Em particular desejo agradecer à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro durante os últimos anos. Agradeço também aos Institutos de Física e de Matemática da UNICAMP e ao Center for Electromagnetics Research, Northeastern University (EUA), que me forneceram toda a infra-estrutura e auxílio necessários para a realização deste trabalho.

Para finalizar agradeço aos meus pais, à minha esposa e aos meus filhos pelo estímulo que sempre me deram.

André Koch Torres Assis

Boston, Maio de 1992

Dedico este livro à memória do meu avô, Eng. David Koch, por tudo aquilo que devo a ele.

1) Revisão do Eletromagnetismo Clássico

1.1 - Introdução

O estudo da natureza e das leis que a regem são alguns dos objetivos principais dos cientistas. Os físicos, em particular, se dedicam a pesquisar os fenômenos mecânicos, gravitacionais, elétricos, magnéticos, ópticos, nucleares, etc. Neste capítulo vamos nos concentrar no estudo do eletromagnetismo clássico.

Este é o nome que se dá à ciência que trata de uma maneira unificada das interações entre cargas elétricas, ímãs, correntes elétricas e da radiação eletromagnética (luz visível, raios X, ondas de rádio, etc.) Embora desde os gregos já se conhecessem alguns fenômenos elétricos (Tales de Mileto, $\sim$ 600 a. C., observou que quando se atritava o âmbar este atraía pequenos objetos) e magnéticos (os gregos sabiam que a magnetita, um tipo de pedra, atraía pedaços de ferro), o conhecimento e desenvolvimento mais amplo desta ciência só passou a ocorrer a partir de aproximadamente 1600. É neste ano que William Gilbert (1540 - 1603) publica o importante livro *de Magnete*, que trata do magnetismo e da eletricidade. É nele que Gilbert apresenta sua grande descoberta de que a própria terra é um ímã permanente, e assim explica a razão das agulhas magnéticas apontarem numa mesma direção. É a ele também que se deve a distinção clara entre atração elétrica e magnética. Também a óptica passa por um grande desenvolvimento a partir desta época. Embora os gregos já conhecessem a lei de reflexão (ângulo de incidência igual ao de reflexão) e o fenômeno da refração, a lei que rege este último fenômeno só foi descoberta por Snell (1591 - 1626) por volta de 1621. A primeira publicação desta lei ocorre em 1637 no apêndice *A Dióptrica*, do famoso e agradável livro *Discurso Sobre o Método*, de René Descartes (1596 - 1650).

A partir daí estes ramos foram se desenvolvendo mais ou menos independentemente. A descoberta da existência de dois tipos de eletricidade (positiva e negativa, como dizemos hoje em dia) é devida a du Fay (1698 - 1739) em 1733-4. O princípio de conservação de cargas elétricas é devido a Benjamin Franklin (1706 - 1790) em seus experimentos de

1747. A lei do inverso do quadrado da distância para as forças eletrostáticas foi sugerida entre outros por Priestley (1733 - 1804), em 1767, e estabelecida experimentalmente por Coulomb (1736 - 1806), em 1785. A mesma lei relativa a pólos magnéticos foi sugerida entre outros por Michell (1724 - 1793), em 1750, e estabelecida experimentalmente por Coulomb, em 1785. Um importante predecessor de Coulomb,no que se refere à atração entre pólos magnéticos foi o físico experimental alemão Aepinus. Em 1759 ele publicou um importante livro que influenciou a Coulomb, onde desenvolve a idéia de ação à distância entre os pólos magnéticos, idéia que acabou suplantando o conceito de circulação de um fluido magnético que havia sido sustentado por Descartes, entre outros. O livro de Aepinus, publicado originalmente em latim, foi traduzido a pouco tempo para o inglês (Aepinus, 1979).

Isaac Newton (1642 - 1727) descobre a decomposição da luz branca nas cores do espectro (arco-íris) em 1666. Ele foi também o primeiro a medir a periodicidade da luz, isto é, aquilo que hoje em dia chamamos de comprimento de onda, embora para ele a luz fosse um fluxo de partículas (teoria balística) e não uma perturbação ondulatória em um meio (éter). Também se deve a Newton a primeira interpretação correta do fenômeno da polarização da luz, em 1717. Publicou seu segundo grande livro (o primeiro sendo *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, de 1687), *Óptica*, em 1704 (ver Newton, 1952 a, b). A descoberta de que a luz se propaga no tempo (e não instantaneamente), e o primeiro valor da velocidade da luz são devidas a Roemer (1644 - 1710), em 1675.

A interconexão entre os fenômenos elétricos e magnéticos, embora pressentida por muitos, só foi descoberta por Oersted (1777 - 1851) em 1820. Em seguida a isto surgem os grandes trabalhos de Ampère (1775 - 1836), no período 1820 - 1826, e Faraday (1791 - 1867), a partir de 1831. A interconexão dos fenômenos elétricos e magnéticos com a luz, embora também pressentida por muitos, só ocorre formalmente pela primeira vez com os trabalhos de Maxwell (1831 - 1879), no período 1860 - 1864. A confirmação experimental das predições teóricas de Maxwell veio com Hertz (1857 - 1894), no período 1885 - 1889.

Estes trabalhos formam a base do eletromagnetismo clássico. Revisaremos este assunto neste capítulo. Como há milhares de livros que tratam desta área, em todos os níveis, faremos apenas uma curta revisão de alguns tópicos, especialmente daqueles

que serão relevantes na discussão da teoria de Weber. Devido ao objetivo deste livro deixaremos de tratar de muitos assuntos importantes do eletromagnetismo moderno, mas o leitor certamente encontrará muitos livros especializados tratando destas áreas. Nosso objetivo ao escrever este capítulo é dar um pano de fundo para a introdução da teoria de Weber. Com isto mais para frente poderemos fazer uma comparação mais detalhada entre a eletrodinâmica de Weber e o eletromagnetismo clássico.

1.2 - Equações de Movimento

Depois deste pequeno resumo histórico podemos voltar ao assunto principal deste capítulo que é uma apresentação do eletromagnetismo clássico. Em linhas gerais pode-se dizer que este é constituído de quatro partes principais, independentes uma da outra, mas todas necessárias para uma formulação completa da teoria. São elas:

(A) Equação de movimento,

(B) Força de Lorentz,

(C) Equações de Maxwell,

(D) Equações ou relações constitutivas do meio.

As equações ou relações constitutivas do meio são descrições empíricas das propriedades dos materiais. Como tais elas não dependem de com qual teoria se está trabalhando e valem do mesmo jeito em todas as formulações teóricas. Exemplos: Lei de Ohm ($V = RI$ ou $\vec{J} = \sigma\vec{E}$), $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, etc. Nestas relações R, σ, ε, e μ são propriedades características de cada meio, sendo medidas empiricamente. Daqui para a frente nos concentraremos apenas nos aspectos (A), (B) e (C).

Um dos problemas mais típicos da física é descrever o movimento de corpos materiais sob a ação de forças. A forma usual mais tradicional de tratar deste problema é usando os três famosos axiomas ou leis de movimento de Newton. Estas leis são aqui apresentadas na forma como Newton formulou-as originalmente em 1687 (Newton, 1952 a) no livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.* Este livro, mais conhecido pelo primeiro nome *Principia*, escrito originalmente em latim, é por muitos considerado como a maior obra da ciência de todos os tempos. Suas leis:

I^a^ Lei: Todo corpo continua em seu estado de repouso, ou de movimento uniforme em uma linha reta, a não ser que seja forçado a mudar este estado por forças impressas sobre ele. (1.1)

II^a^ Lei: A mudança de movimento é proporcional à força motriz impressa; e é feita na direção da linha reta na qual esta força é impressa. (1.2)

III$^{\underline{a}}$ Lei: A toda ação há sempre oposta uma reação igual. Ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais, e direcionadas às partes contrárias. (1.3)

Em linguagem vetorial moderna estas três leis poderiam ser reescritas como segue:

I$^{\underline{a}}$ Lei: Se $\vec{F}_R = 0$ então o corpo fica parado ou em movimento retilíneo uniforme.
(1.4)

II$^{\underline{a}}$ Lei: $\vec{F}_R = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$. (1.5)

III$^{\underline{a}}$ Lei: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. (1.6)

Em (1.4) e (1.5), $\vec{F}_R$ é a força resultante agindo sobre o corpo de massa m, e $\vec{v}$ é a velocidade deste corpo. Em todo este trabalho $\vec{F}_{ji}$ significará a força que o corpo j exerce sobre o i (isto é, a força em i devido a j). Logo em (1.6) $\vec{F}_{AB}$ é a força que A exerce em B, e o oposto para $\vec{F}_{BA}$.

Caso a massa seja constante, a segunda lei de Newton fica na forma

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \ , \tag{1.7}$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração do corpo de massa m. Neste livro nos concentraremos neste último caso e não trataremos de alguns problemas de variação de massa típicos da mecânica (como o do caminhão que vai perdendo areia, ou o do foguete que vai expelindo gases e variando sua massa).

Antes de prosseguir vale à pena comentar que a aceleração que aparece em (1.7) é a aceleração do corpo em relação ao espaço absoluto, conforme formulado por Newton. Pode-se também dizer que esta é a aceleração do corpo em relação a um referencial inercial. Não discutiremos estas noções de espaço absoluto ou referencial inercial. Embora a terra não seja um referencial inercial (sabe-se isto por ela girar em relação ao referencial das "estrelas fixas," por ter uma forma achatada nos pólos, e por experiências como as do pêndulo de Foucault), pode-se na maior parte dos casos considerá-la como tal. Em termos práticos isto significa que em geral pode-se usar as leis de Newton no referencial do laboratório (os efeitos da não inercialidade da terra são muitas vezes pequenos comparados com o

que se está observando). Isto é válido na maioria das situações nas quais os movimentos são restritos a uma pequena área na superfície da terra, e têm uma duração pequena comparada com 24 horas. Neste sentido um observador com velocidade constante (em módulo e sentido) em relação à terra também pode ser considerado como sendo inercial. Caso ele esteja acelerado isto deixa de ser válido.

Há duas formas da terceira lei de Newton: ação e reação forte (quando a força está ao longo da reta que une os dois corpos) e fraca (quando a força tem pelo menos uma das componentes que não está ao longo da reta que une os dois corpos), ver Figura 1.1.

Figura 1.1

Nesta figura mostramos dois exemplos onde vale a terceira lei de Newton na forma forte, dois na forma fraca, e dois exemplos fictícios onde a terceira lei de Newton não é satisfeita.

Para resolver um problema qualquer na física em geral usamos (1.7). Para isto precisamos de relações precisas para a força, e estas relações vão depender do tipo de interação a que o corpo está sujeito. A seguir vão alguns exemplos.

I) Força Gravitacional (também proposta por Newton em 1687):

$$\vec{F}_{ji} = -Gm_i m_j \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \ , \tag{1.8}$$

onde

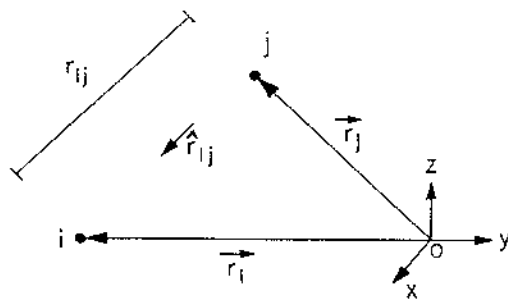



Figura 1.2

Na equação (1.8) temos:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{ij} &\equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j = (x_i - x_j)\hat{x} + (y_i - y_j)\hat{y} + (z_i - z_j)\hat{z} \ , \\ r_{ij} &\equiv [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2} \ , \\ \hat{r}_{ij} &\equiv \vec{r}_{ij}/r_{ij} \ , \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

e onde G é a constante universal da gravitação ($G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$). Em (1.8) $\hat{r}_{ij}$ é o vetor unitário que aponta do corpo j para o i, r_{ij} é a distância entre eles, e $\vec{r}_i$ ($\vec{r}_j$) é o vetor que aponta da origem do sistema de coordenadas até o corpo i (j).

Um caso típico da força gravitacional é o de um corpo interagindo com a terra (força peso $\equiv \vec{P}$). Esta força é representada por

$$\vec{P} = m\vec{g} \ , \tag{1.10}$$

onde $\vec{g}$ é o campo gravitacional da terra. Caso o corpo esteja próximo da superfície terrestre vem que $g \equiv |\vec{g}| = GM_T/R_T^2 \simeq 9.8 \ ms^{-2}$, onde M_T é a massa da terra e R_T seu raio.

II) Força Elástica:

Neste caso temos:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \; , \tag{1.11}$$

onde k é a constante elástica da mola ($k > 0$), e x é a distância do corpo à posição de equilíbrio.

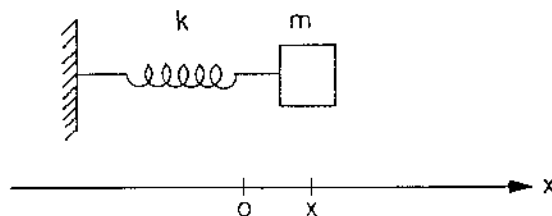



Figura 1.3

III) Força de Atrito Dinâmico:

$$\vec{F} = -b\vec{v} \; , \tag{1.12}$$

onde b é o coeficiente de atrito ($b > 0$) entre o corpo e o meio (ar ou água, por exemplo), e $\vec{v}$ é a velocidade do corpo em relação a este meio. Em geral a força de atrito dinâmica em um fluido é melhor representada por $\vec{F} = -b_1 v^2 \hat{v}$, onde b_1 é uma constante positiva e $\hat{v} \equiv \vec{v}/|\vec{v}|$. Contudo a expressão linear (1.12) é muito mais fácil de ser tratada matematicamente e funciona razoavelmente bem com uma escolha razoável de b.

Estas são as forças mais comuns que se encontram na mecânica. Na próxima seção veremos as forças que aparecem no eletromagnetismo. Juntando estas expressões de força com (1.7) podemos descrever o movimento dos corpos submetidos às interações usuais.

A formulação que apresentamos aqui é a visão clássica Newtoniana. Há outras formulações para descrever o movimento dos corpos no espaço, como as teorias da relatividade restrita e geral de Einstein. Neste livro não discutiremos estas outras formulações já que isto estaria além dos objetivos deste trabalho.

1.3 - Força de Lorentz

Nesta seção discutiremos as forças que aparecem no eletromagnetismo.

I) Força de Coulomb:

Esta é a força eletrostática, obtida por Coulomb em 1785, e que descreve a força exercida pela carga elétrica q_j em q_i, quando ambas estão em repouso em relação ao laboratório:

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} , \tag{1.13}$$

onde $\hat{r}_{ij}$ e r_{ij} foram definidos em (1.9), ver figura 1.2, e ε_o é uma constante chamada de permissividade do vácuo ($\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$).

Caso hajam N cargas em repouso interagindo com uma certa carga q_o vem de (1.13) e do princípio de superposição de forças que a força resultante atuando em q_o é dada por

$$\vec{F} = q_o \vec{E} , \tag{1.14}$$

onde

$$\vec{E}(\vec{r}_o) \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2} . \tag{1.15}$$

Em (1.15) $\vec{E}$ é conhecido como o campo elétrico obtido da lei de Coulomb.

Esta força também pode ser obtida dos potenciais. Lagrange (1736 - 1813) havia introduzido a função potencial escalar na gravitação em 1777. Em 1782 Laplace (1749 - 1827) obteve a equação satisfeita por este potencial no espaço livre, resultado publicado em 1785. Em 1811 Poisson (1781 - 1840) introduziu o potencial escalar no eletromagnetismo e ainda obteve um resultado mais geral que o de Laplace ao obter (1813) a equação satisfeita pelo potencial em regiões onde há matéria e cargas livres (Poisson, 1811 e 1813). No caso do eletromagnetismo o potencial de Poisson é dado por:

$$\phi(\vec{r}_o) \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{oj}} \ . \tag{1.16}$$

Em (1.16) ϕ é conhecido como o potencial escalar elétrico no ponto $\vec{r}_o$ devido às cargas q_j. Aplicando o gradiente em ϕ atuando no ponto $\vec{r}_o$, $\nabla_o\phi$, podemos obter o campo elétrico de (1.15):

$$\nabla_o\phi \equiv \hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x_o} + \hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y_o} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z_o} \ , \tag{1.17}$$

$$\vec{E} = -\nabla_o\phi \ . \tag{1.18}$$

A prova deste fato é para ser obtida no exercício 1.1. O símbolo ∇ é conhecido como *del* ou *nabla*, e é um operador vetorial. Quando atua numa grandeza escalar é conhecido como o gradiente desta função, e dá como resultado uma grandeza vetorial. Em geral o potencial vai variar de ponto para ponto no espaço. A grandeza $\nabla\phi$ é um vetor que aponta, em cada ponto do espaço, na direção de maior crescimento de ϕ. Cargas positivas deixadas livres numa região de potencial variável vão do maior para o menor potencial (isto é, na mesma direção em que $\vec{E}$ aponta) e as cargas negativas movem-se em sentido contrário.

II) Força magnética em uma carga (no Apêndice *A* se encontra uma discussão sobre as origens históricas e os significados da expressão abaixo):

$$\vec{F} = q_o\vec{v}_o \times \vec{B} \ . \tag{1.19}$$

Nesta expressão $\vec{B}$ é o campo magnético na posição onde se encontra a carga q_o, campo este gerado por ímãs ou por correntes elétricas. Já $\vec{v}_o$ é a velocidade da carga q_o **em relação a um observador ou sistema de referência**. Quando aplicamos esta força juntamente com a segunda lei de Newton na forma (1.7) então o observador ou sistema de referência têm de ser inerciais. Este é um dado muito importante e que é pouco enfatizado nos livros didáticos usuais. Aliás a maioria dos livros quando apresenta esta equação diz apenas o seguinte: "Seja uma carga q com velocidade $\vec{v}$ num campo magnético $\vec{B}$, então

a força magnética nesta carga é dada por $q\vec{v} \times \vec{B}$". Ou seja, em geral não se especifica que velocidade é esta que aparece em (1.19). Mas obviamente velocidade é uma grandeza relativa, sendo uma relação entre a carga e um certo corpo em relação ao qual ela se move. Por isto é que para uma mesma carga podem existir várias velocidades diferentes simultaneamente (por exemplo, ela pode estar ao mesmo tempo parada em relação à terra, se aproximando de uma outra carga, se afastando com uma velocidade maior de um certo ímã, etc.) Infelizmente os livros didáticos usuais quando apresentam a relação (1.19) não especificam velocidade da carga em relação a quê (ou seja, não especificam claramente em relação a que corpo, objeto ou sistema é para ser entendida a velocidade $\vec{v}_o$ da carga q_o). Diante desta indefinição o estudante em geral fica confuso entre várias possibilidades: velocidade da carga em relação ao ímã ou fio com corrente que geram $\vec{B}$; em relação à terra ou laboratório; em relação a um referencial (observador) inercial qualquer; em relação ao campo magnético; em relação à velocidade média das cargas microscópicas (elétrons) que geram $\vec{B}$; etc. Apenas quando se entra em tópicos da relatividade restrita nestes livros é que se percebe o significado (para o eletromagnetismo clássico que estamos analisando nesta seção) da velocidade que aparece em (1.19), isto é, velocidade em relação a um observador ou sistema de referência (e não, por exemplo, em relação ao ímã ou campo magnético). Exemplos desta situação inicial vaga na definição da velocidade $\vec{v}_o$ podem ser vistas em vários livros: (Tipler, 1984, Vol. 2a, pág. 731), (Halliday-Resnick, 1984, 4ª ed., Vol. 3, pág. 164), (Sears, 1967, Vol. II, pág. 264), (Feynman, Leighton e Sands, 1977, págs. 1-2 e 13-1), (Jackson, 1975, págs. 2 e 238), (Symon, 1971, pág. 140), (Panofsky e Phillips, 1964, pág. 182), (Purcell, 1965, pág. 150), (Reitz e Milford, 1967, pág. 148), etc. O fato de a velocidade que aparece em (1.19) ser em relação a um referencial, e portanto variar de observador para observador, é o que gera muitas das características típicas do eletromagnetismo clássico que discutiremos mais para frente.

Ainda sobre esta expressão vale lembrar que a força está dada por um produto vetorial entre a velocidade da carga e o campo magnético no ponto onde se encontra a carga, produto este definido pela regra da mão direita utilizada usualmente na análise vetorial. Ainda: $|\vec{F}| = |q_o v_o B \sin\theta|$, onde θ é o ângulo entre $\vec{v}_o$ e $\vec{B}$.

Já demos em (1.15) e (1.16) os valores para o campo elétrico Coulombiano e para o

potencial escalar elétrico. Apresentamos agora o valor do campo magnético gerado por uma corrente usual em fios metálicos, dado pela lei de Biot (1774 - 1862) e Savart (1791 - 1841), de 1820 (no capítulo três discutiremos mais esta expressão):

$$\vec{B}(\vec{r}_o) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_j} I_j d\vec{l}_j \times \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2} \; . \tag{1.20}$$

Nesta expressão μ_o é chamada de permeabilidade do vácuo ($\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7} kgmC^{-2}$), e $I_j d\vec{l}_j$ é um elemento de corrente do circuito C_j. O campo é então obtido integrando-se sobre todo o circuito fechado C_j.

III) Força elétrica geral:

Em 1729 Gray havia descoberto a condução elétrica, isto é, passagem de corrente elétrica por metais, com isto descarregando a carga que havia sido gerada por atrito. Na linguagem de hoje em dia diríamos que Gray descobriu a corrente elétrica gerada pela descarga de cargas eletrostáticas. Isto permitiu a classificação dos materiais entre isolantes e condutores. Em 1780 Galvani descobriu a corrente elétrica gerada quimicamente (no caso dele corrente em nervos de animais) e isto permitiu que em 1792 Volta (1745 - 1827) estivesse iniciando a construção das primeiras pilhas (baterias químicas). Este foi o início do estudo das correntes elétricas (antes disso só se pesquisava a eletrostática e a magnetostática, estudo dos ímãs naturais).

Em 1826 Ohm (1787 - 1854) descobriu a lei que leva seu nome: Se uma pilha ou bateria química gera uma voltagem V entre seus terminais então a corrente elétrica I que vai circular no circuito ligado aos terminais desta pilha vai depender da resistência R do fio de acordo com a relação:

$$I = \frac{V}{R} \; . \tag{1.21}$$

Em 1831 Faraday (1791 - 1867) descobriu que uma corrente é gerada não apenas por uma bateria mas também quando se variava o fluxo magnético sobre o circuito (por exemplo, aproximando ou afastando um ímã deste circuito, ou variando a intensidade de corrente de um circuito secundário, que gera $\vec{B}$ de acordo com (1.20)). A lei de indução de

Faraday pode ser expressa como (no caso em que o circuito não está ligado a uma bateria):

$$I = \frac{\text{fem}}{\text{R}} , \tag{1.22}$$

onde

$$\text{fem} \equiv -\frac{d}{dt}\Phi_M , \tag{1.23}$$

$$\Phi_M \equiv \int_S \int \vec{B}.d\vec{a} . \tag{1.24}$$

Em (1.23), *fem* é conhecido como "força eletromotriz induzida," e embora tenha o nome de força é na realidade uma voltagem de origem não eletrostática cuja unidade é o volt ($1V = 1kg\ m^2C^{-1}s^{-2}$). Já introduzimos em (1.23) o sinal de menos devido à regra de Lenz (1834) que afirma que quando se varia o fluxo sobre o circuito a corrente induzida é em direção tal que a força resultante sobre o circuito tende a se opor à variação do fluxo. Em (1.24) Φ_M é o fluxo magnético sobre o circuito primário, onde está sendo induzida a corrente, devido ao campo magnético gerado no circuito secundário.

Em 1845 Franz Neumann (1798 - 1895) introduziu pela primeira vez o potencial vetor magnético $\vec{A}$ (Neumann, 1845 e 1848 a, b). Este é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}_o) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_j} I_j \frac{d\vec{l}_j}{r_{oj}} . \tag{1.25}$$

O campo magnético no ponto $\vec{r}_o$ pode ser obtido aplicando o rotacional em $\vec{A}$:

$$\vec{B}(\vec{r}_o) = \nabla_o \times \vec{A} . \tag{1.26}$$

O operador $\nabla\times$ é conhecido como rotacional, e ao atuar num campo vetorial gera um novo campo vetorial. Em termos das coordenadas Cartesianas vem:

$$\vec{B}(\vec{r}_o) = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z = \nabla_o \times \vec{A}$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y_o} - \frac{\partial A_y}{\partial z_o}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z_o} - \frac{\partial A_z}{\partial x_o}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x_o} - \frac{\partial A_x}{\partial y_o}\right) . \tag{1.27}$$

A descoberta de Neumann foi perceber que a lei de Faraday podia ser expressa apenas em função do potencial vetor magnético que criou, sem necessitar falar de fluxo magnético, isto é (no capítulo 4 descreveremos em maiores detalhes a lei de Faraday e o papel de $\vec{A}$):

$$\Phi_M = \oint_C \vec{A}.d\vec{l}\,, \tag{1.28}$$

$$\text{fem } = -\frac{d}{dt}\Phi_M = \oint_C \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{l}\,. \tag{1.29}$$

No caso estático vem de (1.15) a (1.18) que existe a operação inversa, isto é, dado o campo elétrico de Coulomb pode-se obter a diferença de potencial (voltagem) entre dois pontos A e B dada por:

$$V = \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B) = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}\,. \tag{1.30}$$

Comparando (1.29) com (1.30) vê-se que $-\partial\vec{A}/\partial t$ tem o mesmo papel que um campo elétrico usual já que ambos geram uma voltagem, voltagem esta que pode ocasionar uma corrente.

A partir do trabalho de Neumann a teoria de circuitos foi generalizada para incluir os efeitos de auto-indutância. Os principais trabalhos nesta direção foram feitos por Kirchhoff (1824 - 1887) no período 1848 - 57 (Kirchhoff, 1850, 1857 a, b; Rosenfeld, 1973); W. Thomson (1824 - 1907), também conhecido como Lord Kelvin, juntamente com Stokes no período 1853 - 4; e Heaviside (1850 - 1925), em 1876. Kirchhoff já em 1857 escrevia a lei de Ohm de maneira geral, da forma como a conhecemos hoje em dia, incluindo as influências dos potenciais escalar elétrico e vetor magnético, isto é (Kirchhoff, 1957 a), $\vec{J} = -\sigma(\nabla\phi + \partial\vec{A}/\partial t)$, onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente. Se formos escrever esta equação em termos de um campo elétrico generalizado vem:

$$\vec{E}(\vec{r}_o) \equiv -\nabla_o\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,. \tag{1.31}$$

Pode-se pensar que esta é uma combinação de (1.18), (1.30) e (1.29). A força elétrica geral é então dada por $\vec{F} = q_o\vec{E}$, com $\vec{E}$ dado por (1.31).

IV) Força de Lorentz:

No eletromagnetismo clássico a expressão geral para a força eletromagnética sobre uma carga é conhecida como força de Lorentz. Ela engloba as influências elétricas e magnéticas e se escreve como

$$\vec{F} = q_o\vec{E} + q_o\vec{v}_o \times \vec{B} \ , \tag{1.32}$$

onde o campo elétrico $\vec{E}$ é dado por (1.31) e o campo magnético $\vec{B}$ por (1.26). Juntando-se esta expressão com a segunda lei de Newton, (1.7), pode-se em princípio descrever o movimento de uma carga interagindo com campos elétricos e magnéticos quaisquer. Novamente a velocidade $\vec{v}_o$ que aparece em (1.32) é a velocidade da carga q_o em relação a um referencial ou observador. Ou seja, não é a velocidade em relação ao campo magnético, e nem em relação ao ímã ou fio que geram $\vec{B}$.

A expressão (1.32) surgiu pela primeira vez em dois trabalhos fundamentais de H. A. Lorentz (1853 - 1928), físico teórico holandês, publicados em 1892 e 1895 (Lorentz, 1892 e 1895). Nestes trabalhos Lorentz deu uma estrutura granular microscópica para a formulação do eletromagnetismo de Maxwell, que era todo baseado no contínuo. Isto é, Lorentz passou a descrever as fontes dos campos como sendo entidades corpusculares discretas, cargas e elementos de corrente.

Vamos agora fazer uma primeira análise da força de Lorentz (uma discussão mais aprofundada é apresentada no capítulo 5). Em primeiro lugar observamos que o potencial escalar elétrico, e o campo elétrico de Coulomb, (1.16) e (1.18), dependem apenas das distâncias entre as cargas interagentes, mas não de suas velocidades. Já o campo magnético $\vec{B}$ de (1.20) depende além disto da corrente elétrica. Como corrente é carga em movimento vem que $\vec{B}$ depende da velocidade das cargas fontes (isto é, cargas que geram os campos) e das distâncias entre as cargas interagentes. Já o potencial vetor magnético está diretamente ligado com $\vec{B}$ por (1.26) e então também depende da velocidade das cargas fontes e das distâncias entre as cargas interagentes.

Vemos então que há três componentes na força de Lorentz (1.32): (I) A força Coulombiana $-q_o\nabla_o\phi$, que depende apenas das posições relativas entre cargas em repouso. (II) A força magnética, $q_o\vec{v}_o \times \vec{B}$, que depende da velocidade $\vec{v}_o$ da carga de teste (isto é,

da carga que sente a força) e da velocidade das cargas fontes (isto é, das cargas que geram $\vec{B}$), pois $\vec{B}$ é diretamente proporcional à corrente elétrica e esta é diretamente proporcional à velocidade. (III) A força de indução, $-q_o\partial\vec{A}/\partial t$, que tem uma componente dependente da aceleração das cargas fontes ($\vec{A}$ ligado com $\vec{B}$, que é proporcional à velocidade, e nesta componente da força aparece $\partial\vec{A}/\partial t$), mas que não depende nem da velocidade nem da aceleração da carga de teste. A outra componente da força de indução depende apenas da velocidade das cargas que geram $\vec{B}$. Isto pode ser visto lembrando que a indução ocorre não apenas quando a intensidade da corrente muda (caso acima, aceleração diferente de zero), mas também quando a intensidade da corrente é constante ($\vec{a} = 0$) e o fluxo de $\vec{B}$ sobre o outro circuito muda no tempo, como quando um ímã se aproxima ou se afasta do circuito primário. Neste segundo caso para haver indução é necessário ter $\vec{B}$ e isto mostra que esta componente vai depender da velocidade.

No capítulo 5 faremos uma comparação da força de Lorentz com a força de Weber.

1.4 - Equações de Maxwell

Para resolver nosso problema inicial, que é o de descrever o movimento de cargas no espaço em relação uma às outras, o primeiro passo já está dado. Isto é, temos a equação de movimento (1.7) e a força eletromagnética correspondente, (1.32). Logo, se estamos num sistema de coordenadas inercial e uma partcúla (ponto material) de carga q e massa m se move com velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ em relação a este referencial inercial, numa região onde há um campo elétrico $\vec{E}$ e um campo magnético $\vec{B}$, vem que seu movimento é descrito pela equação

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \ . \tag{1.33}$$

Obviamente os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que aparecem nesta equação não são aqueles gerados pela própria carga q, mas sim gerados por outras cargas e distribuições de correntes, que são chamados de fontes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Para resolver o problema completo de forma auto-consistente (isto é, descrever o movimento de um conjunto de cargas interagindo entre si sem a presença de campos eletromagnéticos externos) precisamos saber como as fontes geram os campos. Ou seja, dado uma distribuição de cargas e de correntes, obter os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ gerados por este sistema. E é exatamente esta a função das equações de Maxwell.

Seja então ρ uma densidade de carga (as unidades de ρ são Cm^{-3}, isto é, Coulombs por metro cúbico), e $\vec{J}$ uma densidade de corrente (suas unidades sendo $Am^{-2} = Cs^{-1}m^{-2}$, isto é, Ampères por metro quadrado). A quantidade de carga interna a um volume V e a quantidade de corrente que atravessa uma superfície S são dadas respectivamente por

$$Q = \int\!\!\int_V\!\!\int \rho dV \ , \tag{1.34}$$

$$I = \int_S\!\!\int \vec{J}.d\vec{a} \ . \tag{1.35}$$

Nestas expressões dV é um elemento de volume e $d\vec{a}$ é um elemento de área vetorial, sendo sempre perpendicular à superfície S em cada ponto. Por convenção vem que se S for uma superfície fechada, $d\vec{a}$ apontará para fora e a integral dupla sobre toda a

superfície é representada por $\oint$. Em (1.35) I é obtido por um produto escalar entre $\vec{J}$ e $d\vec{a}$, produto este definido pelas regras usuais da análise vetorial. Vale lembrar que ρ, Q e I são grandezas escalares e que $\vec{J}$ é uma grandeza vetorial. Por convenção vem que $\vec{J}$ aponta em direção contrária ao movimento das cargas negativas (usualmente elétrons). Se numa região do espaço temos cargas positivas e negativas em movimento, com velocidades $\vec{v}_+$ e $\vec{v}_-$, respectivamente, então temos:

$$\vec{J} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- \ . \tag{1.36}$$

Nesta equação ρ_+ (ρ_-) é a densidade de cargas positivas (negativas), que se move com velocidade $\vec{v}_+$ ($\vec{v}_-$). Muitas vezes temos apenas correntes macroscopicamente neutras (como no caso da corrente em um fio metálico comum ou em um plasma gasoso) tal que $\rho_- = -\rho_+$. Nestes casos $\vec{J} = \rho_+(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$. No caso de correntes usuais em condutores metálicos apenas os elétrons se movem e então $\vec{J} = \rho_- \vec{v}_- = -\rho_+ \vec{v}_-$. Nas equações de Maxwell ρ e $\vec{J}$ são as fontes básicas que geram $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e então achamos necessário fazer este preâmbulo para esclarecer o que são cada uma destas fontes.

As equações de Maxwell são usualmente apresentadas de duas maneiras: forma diferencial e forma integral. Antes de apresentá-las temos de falar um pouco mais da notação vetorial e de seu significado. Já introduzimos o gradiente de uma função escalar, (1.17), e o rotacional de uma função vetorial, (1.26) e (1.27). Vai aqui o divergente de uma função vetorial, que dá como resultado uma função escalar:

$$\vec{G} = \hat{x} G_x + \hat{y} G_y + \hat{z} G_z \ , \tag{1.37}$$

$$H \equiv \nabla . \vec{G} \equiv \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \ . \tag{1.38}$$

Vamos indicar o significado físico e geométrico de $\nabla\varphi$ por algumas figuras:

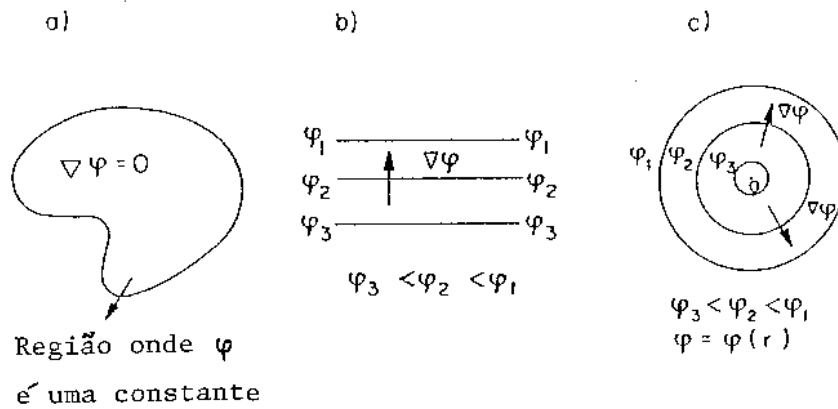



Figura 1.4

No caso do divergente e do rotacional é mais fácil ver o significado observando os seguintes teoremas, válidos para um campo vetorial $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ arbitrário, desde que razoavelmente bem comportado:

$$\int\int_V\int(\nabla.\vec{G})dV = \oiint_S \vec{G}.d\vec{a} \equiv \Phi_G \ . \tag{1.39}$$

$$\int_S\int(\nabla \times \vec{G}).d\vec{a} = \oint_C \vec{G}.d\vec{l} \equiv \mathcal{C}_G \ . \tag{1.40}$$

O primeiro é conhecido como teorema de Gauss ou teorema da divergência. Como já foi afirmado anteriormente, o símbolo $\oiint$ indica que estamos integrando sobre toda a superfície fechada que engloba V. O símbolo Φ_G usualmente indica o fluxo da grandeza $\vec{G}$ através de uma certa superfície S. Do teorema de Gauss vemos então que o divergente de uma grandeza está estreitamente ligado com a quantidade desta grandeza que atravessa uma certa superfície S, isto é, com seu fluxo. Vão a seguir figuras de grandezas vetoriais radiais e tangenciais mostrando onde o fluxo é ou não nulo.

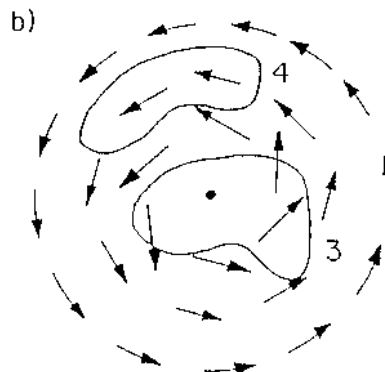
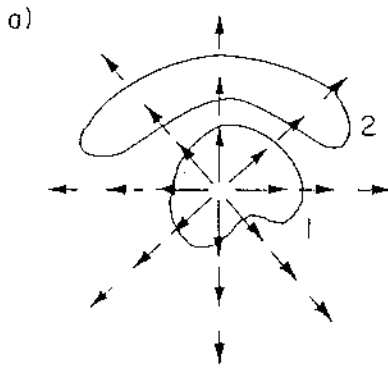
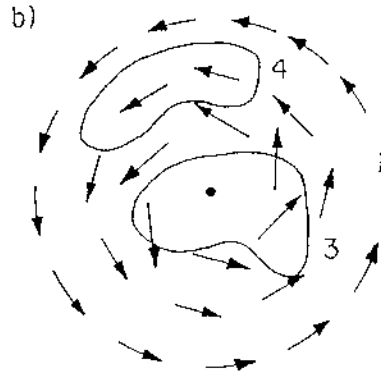



Figura 1.5

(superfícies fechadas)

Estando as superfícies 1, 2, 3 e 4 representadas na figura vem: $\Phi_1 > 0$, $\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$. No caso da superfície fechada 1, $\vec{G}$ está sempre apontando para fora e portanto é sempre quase paralelo a $d\vec{a}$. Já na superfície fechada 2 as linhas de $\vec{G}$ entram na parte mais perto do centro e saem na parte mais afastada, tal que toda linha que entra acaba saindo e o fluxo líquido é então nulo. Nas superfícies fechadas 3 e 4 as linhas entram do lado direito e saem do lado esquerdo tal que novamente o fluxo líquido é nulo.

O segundo teorema, (1.40), é conhecido como teorema de Stokes. Neste caso a superfície S não é fechada e $\mathcal{C}$ é a linha mais externa que contorna S. A integral $\oint \vec{G}.d\vec{l}$ é uma integral de linha sobre toda a linha fechada $\mathcal{C}$. O elemento de área $d\vec{a}$ é normal à superfície S em cada ponto e está relacionado com $d\vec{l}$ pela regra da mão direita, por convenção. O elemento de comprimento $d\vec{l}$ é sempre paralelo (tangencial) a $\mathcal{C}$ em cada ponto. O símbolo $\mathcal{C}_G$ usualmente indica a circulação da grandeza $\vec{G}$ através de uma certa linha $\mathcal{C}$. Na figura 1.6 abaixo temos $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_4 = 0$ e $\mathcal{C}_3 > 0$ (< 0) se fizermos a circulação no sentido anti-horário (horário).

$\vec{G}$ radial

$\vec{G} = K\hat{r}/r^2$

$\vec{G}$ tangencial

$\vec{G} = K\hat{\varphi}/\rho$

Figura 1.6

(superfícies abertas)

Este último resultado pode ser visto observando que $\vec{dl}$ é quase paralelo a $\vec{G}$, apontando sempre na mesma direção em relação a $\vec{G}$, em todos os pontos de $\mathcal{C}_3$. Já nas curvas fechadas 1 e 2, $\vec{dl}$ é em geral ortogonal a $\vec{G}$, e então $\vec{G}.\vec{dl} = 0$, enquanto que na curva fechada 4, e integrando no sentido horário, vem que $\vec{dl}$ é anti-paralelo a $\vec{G}$ na parte da curva mais afastada do centro e é quase sempre quase paralelo a $\vec{G}$ na parte mais próxima, tal que as duas componentes juntas se cancelam.

Agora que já falamos das fontes e dos significados das grandezas vetoriais, podemos finalmente apresentar as equações de Maxwell. Inicialmente vamos apresentá-las na forma diferencial, supondo as fontes e os campos no vácuo. Todas as grandezas são funções da posição e do tempo: $\varphi = \varphi(x,\ y,\ z,\ t)$, $\vec{G} = \hat{x}G_x(x,\ y,\ z,\ t) + \hat{y}G_y(x,\ y,\ z,\ t) + \hat{z}G_z(x,\ y,\ z,\ t)$. As equações de Maxwell são então:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}\ , \tag{1.41}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (1.43)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (1.44)$$

Em (1.42) a constance c é dada por $(\varepsilon_o \mu_o)^{-1/2}$ e tem o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo. Como veremos no próximo capítulo, foi Weber quem introduziu pela primeira vez esta grandeza no eletromagnetismo, em 1846, e foi ele também o primeiro a medi-la experimentalmente, em 1856, juntamente com seu colaborador Kohlrausch.

Alguns comentários sobre estas equações: (1.41) é conhecida como lei ou equação de Gauss, e ela é essencialmente equivalente à força de Coulomb, (1.13) a (1.18), e mostramos isto na seção 1.5. A segunda equação é conhecida como lei circuital de Ampère, e o que Maxwell acrescentou em relação ao trabalho de Ampère foi a introdução da densidade de corrente de deslocamento, $\varepsilon_o \partial \vec{E}/\partial t$. Este termo também é chamado de corrente, assim como $\vec{J}$, já que apesar de não indicar um transporte líquido de cargas elétricas, foi observado que um campo elétrico variável gera um campo magnético, e esta é uma das propriedades fundamentais das correntes elétricas usuais. A terceira equação representa a observação experimental de que não se consegue separar espacialmente os pólos norte e sul de nenhum ímã ou corrente. A quarta e última equação é conhecida como lei de Faraday. Faraday descobriu a indução eletromagnética em 1831. Foram Franz Neumann (em 1845) e Weber (em 1846) os primeiros a colocar a lei de Faraday em forma matemática. Este é o assunto do capítulo 4. Os conhecimentos matemáticos de Faraday sempre foram muito elementares, sendo ele essencialmente um excelente físico experimental.

Vemos então que aquilo que se chama de equações de Maxwell são de fato leis devidas a outros pesquisadores e que já eram conhecidas e usadas na época de Maxwell. O papel de Maxwell foi perceber que este conjunto de equações formava um todo coerente, e introduzir a corrente de deslocamento. Este último feito foi realmente sua grande descoberta, já que a corrente de deslocamento é fundamental para se obter as ondas eletromagnéticas a partir

das equações de Maxwell. Com isto se pôde unificar a óptica com o eletromagnetismo, identificando a luz como sendo uma radiação eletromagnética. Maxwell introduziu este termo (a corrente de deslocamento) para que este conjunto de equações ficasse compatível com a equação de continuidade para cargas, que também é conhecida como a equação de conservação de cargas, e que é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \vec{v}) = 0 \ . \tag{1.45}$$

Para ver isto vamos apresentar dois teoremas básicos da análise vetorial, válidos para quaisquer funções φ e $\vec{G}$ razoavelmente bem comportadas:

$$\nabla.(\nabla \times \vec{G}) = 0 \ , \tag{1.46}$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \ . \tag{1.47}$$

Aplicando $\partial/\partial t$ na Eq. (1.41), invertendo a ordem de derivação, usando (1.42) e (1.46) se obtem (1.45), lembrando que $\vec{J} = \rho \vec{v}$. Ou seja, para obtermos (1.45) foi fundamental o termo da corrente de deslocamento em (1.42).

Apresentamos agora as equações de Maxwell na forma integral, obtidas a partir de (1.41) a (1.44) e usando (1.39) e (1.40), ver exercício 1.3:

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{a} = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int \int_V \int \rho dV \ , \tag{1.48}$$

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_o I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \Phi_E$$

$$= \mu_o \int_S \int \vec{J}.d\vec{a} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \int \vec{E}.d\vec{a} \ , \tag{1.49}$$

$$\oiint \vec{B}.d\vec{a} = 0 \ , \tag{1.50}$$

$$\text{fem} \ \equiv \oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = \frac{d}{dt} \int_S \int \vec{B}.d\vec{a} \ . \tag{1.51}$$

Para se obter as equações de ondas eletromagnéticas basta aplicar o rotacional ($\nabla\times$) em ambos os lados de (1.42) e (1.44), e usar a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla.\vec{G}) - (\nabla.\nabla)\vec{G} \; . \tag{1.52}$$

No caso mais simples onde não há fontes na região de interesse ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$) se obtem (ver também o exercício 1.5 para o caso geral):

$$\left(\nabla.\nabla - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \; , \tag{1.53}$$

$$\left(\nabla.\nabla - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = 0 \; . \tag{1.54}$$

O operador $\nabla.\nabla$ é conhecido como o Laplaciano e algumas vezes ele é escrito como $\nabla.\nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, e é dado por:

$$\nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \; . \tag{1.55}$$

Estas equações descrevem as ondas eletromagnéticas obtidas pelas equações de Maxwell.

Antes de encerrar esta seção vamos falar um pouco da questão dos potenciais ϕ e $\vec{A}$. Como vimos, as equações de Maxwell dependem apenas de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e também a força de Lorentz (1.32) só depende de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Isto indica que estes são os campos reais do eletromagnetismo clássico, isto é, aqueles que influenciam na força e no movimento das cargas. Como vimos em (1.26) e (1.31), podemos expressar $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos de ϕ e $\vec{A}$. Como o gradiente de uma constante é zero, podemos adicionar ou subtrair uma constante a ϕ sem alterar o valor do campo elétrico ou da força, e da mesma forma podemos adicionar a $\vec{A}$ o gradiente de uma função escalar φ sem alterar o valor de $\vec{B}$ (lembre-se de (1.47)). Isto permite uma certa liberdade na escolha de $\vec{A}$ e ϕ, e é a isto que se dá o nome de calibre ou de gauge. Damos a seguir os calibres de Coulomb e de Lorentz, dados pela definição de $\nabla.A$:

$$\text{calibre de Coulomb} : \nabla.\vec{A} \equiv 0 \; , \tag{1.56}$$

$$\text{calibre de Lorentz} : \nabla.\vec{A} \equiv -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \ . \tag{1.57}$$

Vale ressaltar que tanto num calibre quanto no outro a força de Lorentz é exatamente a mesma.

Usando-se estes calibres e as equações de Maxwell pode-se obter (ver exercício 1.6) equações de onda também para ϕ e $\vec{A}$. No caso do calibre de Coulomb vem

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \ , \tag{1.58}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_o\vec{J} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \ . \tag{1.59}$$

A primeira destas equações é conhecida como equação de Poisson.

Já no calibre de Lorentz vem

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \ , \tag{1.60}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_o\vec{J} \ . \tag{1.61}$$

Numa região sem cargas e sem correntes vem de (1.60), (1.61), (1.53) e (1.54) que todas as componentes retangulares de $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$, e ϕ, satisfazem à mesma equação.

Embora as equações (1.58) a (1.61) sejam diferentes, e portanto dêem soluções diferentes, isto não é problema já que no eletromagnetismo clássico os campos reais são $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e não ϕ e $\vec{A}$. E tanto no calibre de Coulomb quanto no de Lorentz vem que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem às mesmas equações, (1.53) e (1.54), ou às equações gerais do exercício 1.5.

Nos exercícios 1.7 a 1.8 indica-se como obter as equações de Gauss, (1.41), e de Faraday (1.44), a partir do campo elétrico que aparece na força de Lorentz. A derivação das leis de Ampère, (1.42), e dos monopólos magnéticos, (1.43), é assunto do terceiro capítulo.

De maneira extremamente reduzida e simplificada podemos dizer que a segunda lei de Newton acoplada à força de Lorentz, juntamente com as equações de Maxwell e as equações constitutivas do meio constituem o cerne do eletromagnetismo clássico.

Antes de prosseguirmos vamos fazer alguns comentários importantes. Como já falamos anteriormente, as equações de Maxwell são independentes da força de Lorentz. Isto significa que as equações de Maxwell poderiam continuar válidas mesmo que tivéssemos uma lei de força para cargas elétricas diferente da força de Lorentz. Um outro dado é que as equações de Maxwell são independentes entre si, no sentido de que não se consegue, por exemplo, derivar a lei de Faraday da lei circuital de Ampère, e vice-versa (ver porém o exercício 1.9). Contando cada equação vetorial como uma equação, temos então que o eletromagnetismo clássico é composto de cinco equações independentes (Newton-Lorentz mais as quatro equações de Maxwell), além das relações constitutivas do meio.

1.5 - Derivação da Lei de Gauss

Nesta seção vamos derivar a lei de Gauss a partir da força de Coulomb, (1.13). Esta força no caso da interação de q_o com outras N cargas pode ser escrita como (1.14), com o campo elétrico dado por (1.15). De (1.15) vemos que o campo elétrico de cada carga q_j, $\vec{E}_j \equiv q_j \hat{r}_{oj}/(4\pi\varepsilon_o r_{oj}^2)$, aponta radialmente a partir desta carga e cai com o quadrado da distância. Para chegar na lei de Gauss vamos supor inicialmente uma única carga q_j e uma superfície fechada S_o como indicado na figura 1.7.

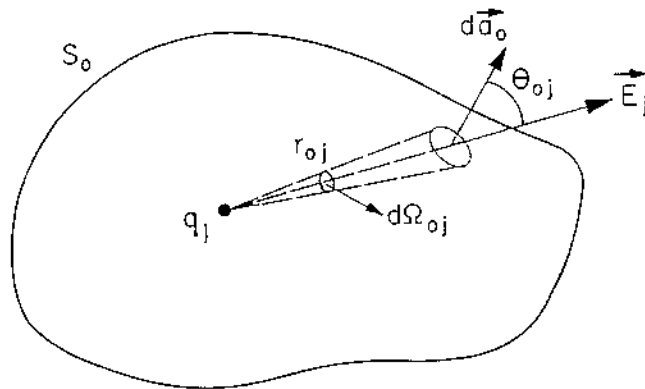



Figura 1.7

Seja $d\vec{a}_o$ um elemento de área desta superfície localizado no ponto $\vec{r}_o$ e apontando sempre para fora, por convenção. É fácil ver que

$$\vec{E}_j.d\vec{a}_o = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos\theta_{oj}}{r_{oj}^2}da_o \ , \tag{1.62}$$

onde θ_{oj} é o ângulo entre $\hat{r}_{oj}$ e $d\vec{a}_o$. Como $\vec{E}_j$ aponta radialmente a partir de q_j, vem que cos $\theta_{oj} da_o = r_{oj}^2 d\Omega_{oj}$, onde $d\Omega_{oj}$ é o elemento de ângulo esférico subentendido por da_o na posição de q_j (ver figura 1.7). Logo

$$\vec{E}_j.d\vec{a}_o = \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega_{oj} \ . \tag{1.63}$$

Integrando $\vec{E}_j.d\vec{a}_o$ sobre toda a superfície S_o é fácil ver que $\oint\!\!\oint_{S_o} d\Omega_{oj} = 4\pi$ se q_j estiver dentro da superfície S_o, e $\oint\!\!\oint_{S_o} d\Omega_{oj} = 0$ se q_j estiver fora da superfície S_o. Usando o princípio da superposição para somar a contribuição das N cargas vem então

$$\oint\!\!\!\oint_{S_o} \vec{E}.d\vec{a}_o = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{j=1}^{m} q_j = \frac{1}{\varepsilon_o}\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int \rho dV_o \ , \tag{1.64}$$

onde a somatória $\sum_{j=1}^{m}$ se estende apenas às cargas que estão dentro de S_o, e a última igualdade é obtida supondo-se uma distribuição contínua de cargas, $q \to \rho dV$, sendo V_o o volume englobado por S_o. E esta é a forma integral da lei de Gauss, Eq. (1.48).

Para se chegar na forma diferencial da lei de Gauss, (1.41), basta usar o teorema de Gauss, (1.39). Com isto vem

$$\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int \left(\nabla.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_o}\right) dV_o = 0 \ . \tag{1.65}$$

Como esta equação é válida qualquer que seja o volume V_o vem que o integrando tem de ser nulo, e então chegamos a (1.41).

Uma outra prova usando propriedades mais avançadas do cálculo vetorial pode ser obtida através do potencial de Poisson, (1.16), além de (1.18) e (1.55):

$$\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int (\nabla_o.\vec{E}) dV_o = -\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int [\nabla_o.(\nabla_o\phi)] dV_o$$

$$= -\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int \nabla_o^2\phi = \sum_{j=1}^{m}\frac{-1}{4\pi\varepsilon_o}\int\!\!\int_{V_o}\!\!\int q_j\left(\nabla_o^2\frac{1}{r_{oj}}\right) dV_o \ . \tag{1.66}$$

Como mostramos na seção 3.5, há um resultado importante da análise vetorial que diz que

$$\nabla_o^2\frac{1}{r_{oj}} = -4\pi\delta(\vec{r}_o - \vec{r}_j) \ , \tag{1.67}$$

onde $\delta(\vec{r}_o - \vec{r}_j)$ é conhecida como a função delta de Dirac. Suas propriedades:

$$\delta(\vec{r}_o - \vec{r}_j) = 0 \ \text{ para } \ \vec{r}_o \neq \vec{r}_j \ , \tag{1.68}$$

$$\iiint_{V_o} f(\vec{r}_o)\delta(\vec{r}_o - \vec{r}_j)dV_o$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = f(\vec{r}_j) \text{ se } V_o \text{ contem } \vec{r}_j \ , \\ = 0 \text{ se } V_o \text{ não contem } \vec{r}_j \ . \end{array} \right\} \tag{1.69}$$

Aplicando (1.67) em (1.66) se chega em (1.64) ou (1.65), desde que se use também o teorema de Gauss (1.39). E daí se chega na forma diferencial da lei de Gauss, CQD.

1.6 - Exercícios

1.1 - Mostre que $-\nabla_o\phi$, com ϕ e $\nabla_o\phi$ dados por (1.16) e (1.17), é o mesmo que $\vec{E}$ dado por (1.18).

1.2 - Refaça explicitamente todas as contas indicadas no texto para mostrar que as equações de Maxwell (1.41) e (1.42) são compatíveis com a equação de continuidade, (1.45). Ou seja, derive (1.45) a partir de (1.41) e (1.42).

1.3 - Reobtenha explicitamente as equações de Maxwell na forma integral, (1.48) a (1.51), a partir de (1.41) a (1.44), usando os teoremas de Gauss e Stokes, (1.39) e (1.40), e usando também as identidades vetoriais (1.46) e (1.47).

1.4 - (A) Prove as relações (1.46) e (1.47) usando as expressões de $\nabla\varphi$, $\nabla.\vec{G}$ e $\nabla\times\vec{G}$ em termos das componentes dadas por (1.17), (1.27) e (1.38). Para isto suponha funções bem comportadas tal que a ordem de derivação possa ser invertida.

(B) Use (1.17) e (1.38) para mostrar que

$$\nabla.(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} .$$

Como já foi dito, esta expressão é conhecida como o Laplaciano de φ.

1.5 - O objetivo deste exercício é obter as equações de onda no caso geral, válidas também numa região onde há cargas e correntes. Para isto vai-se usar a identidade vetorial (1.52). Nesta expressão o Laplaciano é dado por (1.55). Suponha que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são funções bem comportadas tal que se possa inverter as ordens de derivação.

(A) Aplique o rotacional de ambos os lados da lei de Faraday, (1.44), use a identidade vetorial acima, a lei de Gauss, (1.41), e a lei circuital de Ampère, (1.42) para obter a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}\nabla\rho + \mu_o\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \ .$$

(B) Aplique o rotacional de ambos os lados da lei circuital de Ampère, (1.42), use a identidade vetorial acima, a equação (1.43), e a lei de Faraday, (1.44), para obter a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = -\mu_o\nabla\times\vec{J} \ .$$

1.6 - Agora podemos obter as equações satisfeitas por ϕ e $\vec{A}$.

(A) Aplique as expressões para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos de ϕ e $\vec{A}$, dadas por (1.31) e (1.26), nas equações de Maxwell (1.41) a (1.44). Observe que no caso de (1.43) e (1.44) se obtem simplesmente a identidade $0 = 0$.

(B) Use então o calibre de Coulomb, (1.56), para chegar em (1.58) e (1.59).

(C) Em vez do calibre de Coulomb use agora o calibre de Lorentz, (1.57), no resultado obtido na letra (A), para chegar em (1.60) e (1.61).

1.7 - O campo elétrico que aparece na força de Faraday é dado em termos dos potenciais em (1.31).

(A) Obtenha daí

$$\nabla.\vec{E} = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\vec{A}) \ .$$

(B) Use o calibre de Coulomb, (1.56), e sua correspondente equação de onda, (1.58) e (1.59), para chegar em (1.41).

(C) Use agora o calibre de Lorentz, (1.57), e sua correspondente equação de onda, (1.60) e (1.61), no resultado da letra (A), para chegar em (1.41).

1.8 - Derivação da lei de Faraday a partir do campo elétrico que aparece na força de Lorentz.

(A) Aplique o rotacional nos dois lados da expressão para $\vec{E}$ em (1.31).

(B) Use (1.47) e (1.26) para chegar em (1.44).

Este exercício ilustra o fato de que apenas a componente $\partial\vec{A}/\partial t$ do campo elétrico é relevante para a lei de Faraday.

1.9 - Suponha que as funções $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sejam bem comportadas tal que se possa inverter a ordem de derivação.

(A) Aplique o divergente de ambos os lados da lei de Faraday, (1.44), e use (1.46) para concluir que $\partial(\nabla.\vec{B})/\partial t = 0$, isto é, que $\nabla.\vec{B}$ não depende explicitamente do tempo.

(B) Faça agora a hipótese adicional (isto não vem de (1.41), (1.42) nem (1.44)) de que em algum momento do passado $\nabla.\vec{B} = 0$ em todos os pontos do espaço. Com esta hipótese adicional se chega então em (1.43).

(C) Aplique o divergente de ambos os lados de (1.42) e a relação (1.46) para concluir que

$$\nabla.\vec{J} = -\varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\vec{E}) \ .$$

(D) Use agora a equação de continuidade (que não pode ser derivada apenas de (1.42) a (1.44)), Eq. (1.45), mais o fato de que $\vec{J} = \rho\vec{v}$ para derivar a lei de Gauss (1.41), a menos de uma constante que pode ser fixada como zero.

Este exercício ilustra que só se pode derivar alguma das equações de Maxwell a partir das outras três caso se façam outras hipóteses adicionais.

2) Força e Energia Potencial de Weber

2.1 - Força de Weber

Neste capítulo vamos discutir a força de Weber e algumas de suas principais características. Para uma biografia de Weber ver, por exemplo, (Wiederkehr, 1967; Werner e Werner, 1976; Woodruff, 1976 e Assis, 1991 b). Os principais trabalhos de Weber estão listados na bibliografia ao fim deste livro em seguida à palavra "Weber."

Wilhelm Eduard Weber (1804 - 1891) foi um grande físico experimental alemão que deu contribuições fundamentais para o eletromagnetismo, como a invenção do eletrodinamômetro (aparelho para medir a força entre dois fios com corrente elétrica). Criou, juntamente com Gauss, o primeiro telégrafo operacional do mundo (1833). Estabeleceu, também com Gauss, um sistema de medidas absoluto para grandezas eletromagnéticas (campo magnético, corrente elétrica, resistência, etc.) Durante alguns anos a unidade de corrente elétrica foi chamada de *Weber* em reconhecimento ao seu trabalho experimental, até que em 1881 resolveu-se chamar de *Ampère* a esta medida, num congresso internacional realizado em Paris. Desde 1935 que se designa por *Weber* à unidade de fluxo magnético no sistema internacional de unidades. Trabalhou em Gottingen, onde foi colega de Gauss, que também era professor na mesma universidade, e chegou a ser professor na universidade de Leipzig no período entre 1843 e 1849, que é quando desenvolveu seus principais trabalhos teóricos. É durante este período, mais especificamente em 1846, que desenvolve e publica sua lei de força entre duas cargas elétricas (Weber, 1846 e 1848). Para estas e outras informações ver também: (O'Rahilly, 1965, Cap. 11; Whittaker, 1973, pág. 201; Wise, 1981; Harman, 1982, págs. 32, 96, 103 a 107; Atherton, 1989; e Jungnickel e McCormmach, 1986).

A força de Weber que uma carga q_j exerce numa carga q_i é dada por

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij}\ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) , \qquad (2.1)$$

onde

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} r_{ij} , \tag{2.2}$$

$$\ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d^2}{dt^2} r_{ij} = \frac{d}{dt} \dot{r}_{ij} , \tag{2.3}$$

e onde r_{ij} e $\hat{r}_{ij}$ são dados por (1.9). No próximo capítulo veremos de onde veio esta força, ou seja, para que se pudesse derivar de uma única lei os resultados de Coulomb e de Ampère. Como a força de Coulomb depende de unidades eletrostáticas e a de Ampère de unidades eletrodinâmicas, a constante c que aparece em (2.1) é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. Seu valor foi primeiro obtido experimentalmente por Weber e Kohlrausch em 1856, e o valor que obtiveram foi $3.1 \times 10^8\ m/s$, que era essencialmente, dentro dos erros experimentais, o valor da velocidade da luz no vácuo (Kohlrausch e Weber, 1857; Rosenfeld, 1956; e Kirchner, 1957). Esta foi a primeira evidência forte para a existência de uma conexão profunda e precisa entre o eletromagnetismo e a óptica. Maxwell utilizou este valor obtido por Weber e Kohlrausch em seu Tratado (*A Treatise on Electricity and Magnetism*) para justificar sua própria teoria eletromagnética da luz (ver Maxwell, 1954, Vol. 2, págs. 416 e 436). Lembrando então que se vai obter a lei de Ampère a partir da lei de Weber, e estando ambas no sistema internacional de unidades, vem que se pode colocar $c = (\mu_o \varepsilon_o)^{-1/2}$ em (2.1). Pode-se dizer que Weber e Kohlrausch foram os primeiros a medir $(\mu_o \varepsilon_o)^{-1/2}$.

As principais propriedades da força de Weber são:

(A) Ela segue a terceira lei de Newton (a de ação e reação) na forma forte, qualquer que seja o estado de movimento das cargas. Isto é, a força está sempre ao longo da reta que une as duas cargas e $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$.

(B) A lei de Coulomb é um caso particular da lei de Weber, obtida no caso em que as cargas estão paradas uma em relação à outra. Ou seja, quando $\dot{r}_{ij} = 0$ e $\ddot{r}_{ij} = 0$ vem que (2.1) se reduz a (1.13). Como a primeira das equações de Maxwell, a lei de Gauss, essencialmente nada mais é do que a lei de Coulomb escrita de forma diferencial (ver seção 1.5), vem que com a força de Weber pode-se derivar a primeira das equações de Maxwell, juntamente com a primeira parte da força de Lorentz, $-q\nabla\phi$ em (1.32).

(C) A equação de movimento é obtida juntando-se (2.1) com a segunda lei de Newton, (1.7).

(D) A velocidade e aceleração que aparecem em (2.1) são apenas as velocidades e acelerações radiais **entre as duas cargas**, como dado por (2.2) e (2.3). Isto nos leva à última e fundamental propriedade da lei de Weber:

(E) Na lei de Weber só aparecem grandezas relacionais para especificar a posição e o movimento das cargas. Isto é, as únicas grandezas que vão interessar para saber a força são $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, dr_{ij}/dt, e d^2r_{ij}/dt^2. Isto significa que cada termo da força tem o mesmo valor para *todos* os observadores, mesmo se os observadores forem não inerciais. O vetor $\vec{r}_i$ que liga um observador O à carga i pode ser diferente de um vetor $\vec{r}_i\,'$ que liga a mesma carga a um outro observador O'. Mas o vetor $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ que liga a carga j à carga i é o mesmo tanto para O quanto para O', isto é, $\vec{r}_{ij}\,' = \vec{r}_{ij}$. O mesmo vale para r_{ij}, $\dot{r}_{ij}$ e $\ddot{r}_{ij}$. Por isso se diz que estas são grandezas relacionais, que dependem apenas das relações entre os corpos que estão interagindo, mas que não dependem de quem está observando. Como se mostra no exercício 2.2, as grandezas relacionais são $\vec{r}_{ij}$, r_{ij}, $\hat{r}_{ij}$, $\dot{r}_{ij}$ e $\ddot{r}_{ij}$. Exemplos de grandezas não relacionais: $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$, $\vec{v}_{ij}$, $\vec{a}_{ij}$, $\vec{v}_{ij}\cdot\vec{v}_{ij}$, $\vec{a}_{ij}\cdot\vec{a}_{ij}$, $\hat{r}_{ij}\cdot\vec{a}_{ij}$, $\vec{r}_{ij}\cdot\vec{a}_{ij}$, etc.

Foi dada uma ênfase maior neste último aspecto já que a lei de Weber é uma das únicas formulações já propostas para abranger os fenômenos elétricos e magnéticos que tem esta propriedade. As outras formulações como as de Gauss, Riemann, Clausius, Lorentz, etc., ou dependem da velocidade da carga em relação ao observador, ou da velocidade da carga em relação a um éter. Vamos ver um exemplo disto no caso da força de Lorentz. Se numa certa região do espaço há apenas um campo magnético estacionário (gerado por exemplo por um ímã em repouso em relação a um referencial inercial O), e um observador em repouso neste mesmo referencial vê uma carga q se movendo com velocidade $\vec{v}$ nesta região do espaço, então ele verá a carga sofrer uma força magnética dada por (1.19) ou pelo último termo de (1.32). Para um outro observador O' que neste mesmo instante está se movendo com velocidade constante $\vec{v}$ em relação a O (sendo portanto um outro observador inercial) não vai haver nenhuma força magnética sobre a carga já que em relação a ele a carga está instantaneamente parada ($\vec{v}\,' = 0$) e então $q\vec{v}\,' \times \vec{B}' = 0$ para ele. Vemos com

isto que a força magnética no eletromagnetismo clássico pode ser distinta mesmo para dois observadores inerciais. Voltaremos a discutir este assunto em mais detalhes no capítulo 5.

Usando-se (2.2) e (2.3) pode-se colocar a força (2.1) na forma (ver exercícios 2.1 e 2.2):

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} \right) \right] , \tag{2.4}$$

onde

$$\vec{v}_{ij} \equiv \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_j , \tag{2.5}$$

$$\vec{a}_{ij} \equiv \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \equiv \vec{a}_i - \vec{a}_j . \tag{2.6}$$

Chamamos a atenção para os exercícios 2.1 e 2.2 pois neles se mostra que nem sempre $\dot{r}_{ij}$ é igual a $(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^{1/2}$. Além disto se mostra que $\dot{r}_{ij}$ é uma grandeza relacional enquanto que $(\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^{1/2}$ pode variar de observador para observador. Em particular no exercício 2.1 se mostra que

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{dr_{ij}}{dt} = \hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} , \tag{2.7}$$

$$\ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d^2}{dt^2} r_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} [\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}] . \tag{2.8}$$

2.2 - Energia Potencial de Weber

A lei de Weber foi o primeiro exemplo histórico que surgiu de uma força entre cargas que dependia não apenas da distância entre elas mas também de suas velocidades. Isto gerou críticas por parte de alguns cientistas da época que achavam que esta força era inconsistente com o princípio de conservação da energia. Foi então que dois anos depois, em 1848 (Weber, 1848), Weber apresentou sua energia potencial generalizada definida por:

$$U \equiv \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{ij}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right) . \tag{2.9}$$

O primeiro termo desta energia é a energia potencial Coulombiana usual, enquanto que o segundo termo é uma mistura de energia cinética e potencial já que depende não só da distância entre as cargas mas também de suas velocidades mútuas. Este também foi o primeiro exemplo que surgiu na ciência de uma energia potencial generalizada. Assim como no caso da energia potencial Coulombiana, pode-se pensar em U de (2.9) como sendo a energia gasta para formar o sistema. Isto é, U é a energia que tem de ser dispendida para trazer q_i e q_j desde o infinito (onde se considera que estão em repouso e a uma distância infinita uma da outra) até chegarem à separação r_{ij} com velocidade relativa $\dot{r}_{ij}$. Esta energia é gasta contra a força de Weber (2.1) atuando entre as duas cargas.

A maneira mais simples de derivar a força desta energia potencial é fazendo

$$\vec{F}_{ji} = -\hat{r}_{ij} \frac{dU}{dr_{ij}} . \tag{2.10}$$

A forma detalhada de chegar em (2.1) a partir de (2.10) está indicada no exercício 2.3. Uma outra maneira de obter a força a partir do potencial é indicada na próxima seção.

2.3 - Conservação do Momento Linear, do Momento Angular e da Energia

Um dos aspectos de maior importância na física clássica são as três leis básicas de conservação: energia, momento linear e angular. Vamos aqui mostrar que a lei de Weber, juntamente com sua energia generalizada, satisfaz a estas três leis capitais. Inicialmente vamos tratar do momento linear.

A conservação do momento linear segue diretamente do fato de que a força de Weber satisfaz ao princípio de ação e reação. Este fato independe até mesmo da forma da força, bastando que valha $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$, como é o caso da lei de Weber. Escrevendo então o momento linear total de um sistema de duas partículas em relação a um referencial inercial vem

$$\vec{P} \equiv m_i\vec{v}_i + m_j\vec{v}_j \ . \tag{2.11}$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo, usando (1.7) e a lei de ação e reação, (1.6), vem $d\vec{P}/dt = 0$, CQD. Este princípio pode ser generalizado para um número qualquer de partículas interagindo por meio de várias forças (Weber, elástica, gravitacional, etc.), desde que estas forças satisfaçam ao princípio de ação e reação (ver exercício 2.4).

Em segundo lugar vem a questão da conservação do momento angular. Consideramos novamente um referencial inercial no qual duas partículas interagem entre si através de uma força de Weber. O momento angular total do sistema é definido por

$$\vec{L} \equiv \vec{r}_i \times (m_i\vec{v}_i) + \vec{r}_j \times (m_j\vec{v}_j) \ . \tag{2.12}$$

Fazendo $d\vec{L}/dt$, usando as regras usuais da análise vetorial, lembrando que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$, usando (1.7) e a lei de ação e reação vem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} \ . \tag{2.13}$$

Até o momento não foi utilizada a lei de Weber, a não ser no fato de ela satisfazer ao princípio de ação e reação. Usando agora que ela satisfaz a este princípio na forma forte, ou seja, que $\vec{F}_{ji}$ é paralelo a $\hat{r}_{ij}$, vem que $d\vec{L}/dt = 0$. Novamente este resultado não

dependeu da forma explícita da força de Weber, mas apenas de esta força satisfazer ao princípio de ação e reação, neste caso na forma forte. Este resultado pode ser generalizado a um número qualquer de partículas interagindo entre si por forças de qualquer natureza, desde que satisfaçam ao princípio de ação e reação na forma forte (ver exercício 2.5).

Por último vem a conservação de energia. Supondo que temos duas cargas q_i e q_j, de massas m_i e m_j, interagindo entre si através de uma força de Weber temos que a energia total do sistema é dada por:

$$E \equiv U + T \ , \tag{2.14}$$

onde U é a energia de Weber dada por (2.9) e T é a energia cinética dada por

$$T \equiv m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} + m_j \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j}{2} \ , \tag{2.15}$$

onde $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$ é a velocidade da partícula em relação a um observador inercial qualquer.

Derivando E em relação ao tempo, usando (1.7) e a terceira lei de Newton, (1.6), e também o resultado do exercício 2.1 sobre o significado de $\dot{r}_{ij}$ vem que obtemos, lembrando de (2.1):

$$\frac{dE}{dt} = 0 \ , \quad CQD \ . \tag{2.16}$$

Este resultado pode ser generalizado facilmente para um número N de partículas interagindo entre si por forças do tipo de Weber. Este é o objetivo do exercício 2.6. Obviamente o resultado vai continuar válido se elas interagirem entre si também através de outras forças conservativas (como forças elásticas ou gravitacionais), além da interação eletromagnética de Weber.

Este procedimento sugere uma nova forma de determinar a força a partir do potencial: Dada uma energia potencial U, a força de j em i, $\vec{F}_{ji}$, pode ser obtida fazendo (ver exercício 2.7):

$$\frac{dU}{dt} = -(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{F}_{ji} \ . \tag{2.17}$$

Nesta seção vimos então que a teoria de Weber é compatível com toda a física clássica já que com ela se derivam as leis de conservação básicas a toda a física: conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Este é um dos resultados fortes e importantes da eletrodinâmica de Weber.

No apêndice B apresentamos a Lagrangeana e a Hamiltoniana de Weber, indicando maneiras alternativas de se derivar a força de Weber, as equações de movimento e a conservação da energia.

2.4 - Exercícios

2.1 - Use as equações (1.9), (2.2) e (2.3) para mostrar que (use também as definições (2.5) e (2.6)):

(A) $\dot{r}_{ij} = \hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$,

(B) $\ddot{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}[\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}]$,

(C) Utilize os resultados deste exercício para chegar em (2.4) a partir de (2.1).

2.2 - Uma outra expressão que às vezes é usada como velocidade relativa é dada por

$$u_{ij} \equiv (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^{1/2} = [(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)]^{1/2} .$$

Embora na maioria dos casos u_{ij} dê o mesmo valor que $\dot{r}_{ij}$, isto nem sempre ocorre. Em particular u_{ij} não é verdadeiramente uma grandeza relacional, já que o valor desta grandeza pode variar de observador para observador. As grandezas realmente relacionais são: $\vec{r}_{ij}$, r_{ij}, $\hat{r}_{ij}$, $\dot{r}_{ij}$ e $\ddot{r}_{ij}$. Apresentamos também alguns exemplos de grandezas não relacionais: $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$, $\vec{v}_i$, $\vec{v}_j$, $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$, u_{ij}, $\vec{v}_{ij}$, $\vec{a}_{ij}$, $(\vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij})^{1/2}$, $\hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$, $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$, etc.

(A) Considere um observador ou sistema de referência O no qual a partícula pontual i está sobre a origem do sistema de coordenadas, em repouso, e no qual a partícula pontual j está sobre o eixo X à distância ρ da origem, também em repouso. Mostre que

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j = \vec{v}_{ij} = 0 \text{ , e que } \dot{r}_{ij} = u_{ij} = 0 .$$

(B) Seja O' um outro sistema de referência com mesma origem que O e que em $t = 0$ tenha seus eixos $X'Y'Z'$ paralelos a XYZ, mas que gire com velocidade angular constante $w\hat{z}$ em relação a O. Mostre que $\vec{v}_i{}' = 0$, $\vec{v}_j{}' = -\rho w(\hat{x}' \sin wt + \hat{y}' \cos wt)$, $\vec{v}_{ij}{}' = -\vec{v}_j{}' \neq 0$, $\vec{v}_{ij}{}' \neq \vec{v}_{ij}$, e que $\dot{r}'_{ij} = 0$, mas $u'_{ij} = \rho w \neq 0$.

Este exemplo simples e particular é para mostrar que u_{ij} não é uma grandeza relacional, enquanto que $\dot{r}_{ij}$ é relacional (neste caso vimos que $\dot{r}'_{ij} = \dot{r}_{ij}$, enquanto que $u'_{ij} \neq u_{ij}$) .

(C) Encontre exemplos mostrando situações onde $\vec{a}_{ij}{}' \neq \vec{a}_{ij}$, $\hat{r}'_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}{}' \neq \hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$, etc.

2.3 - Na situação mais geral possível temos que duas partículas i e j se locomovem no tempo quando estão interagindo entre si de tal forma que $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ e $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$. Isto naturalmente leva a que $r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}| = r_{ij}(t)$. Use a regra da cadeia para mostrar que

$$\frac{d\dot{r}_{ij}^2}{dr_{ij}} = 2\ddot{r}_{ij} \ .$$

Use este resultado juntamente com (2.9) e (2.10) para chegar em (2.1).

2.4 - O objetivo deste exercício é generalizar o resultado da conservação do momento linear.

(A) O momento linear de três corpos é definido por $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{3} m_i \vec{v}_i$. Suponha que estes corpos apenas interagem entre si através de forças de Weber do tipo (2.1). Mostre que $d\vec{P}/dt = 0$ utilizando (1.6), (1.7) e o fato da força de Weber satisfazer ao princípio de ação e reação. Suponha que não hajam forças externas.

(B) Generalize o resultado anterior para N corpos interagindo entre si por forças de Weber e também por outras forças (gravitacionais, elásticas, etc.), desde que elas também satisfaçam ao princípio de ação e reação. Novamente suponha que não hajam forças externas.

2.5 - O objetivo deste exercício é generalizar o resultado da conservação do momento angular.

(A) O momento angular total de um sistema de três corpos é definido por $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$. Suponha que estes corpos apenas interagem entre si através de forças de Weber do tipo (2.1). Mostre que $d\vec{L}/dt = 0$ utilizando (1.6), (1.7) e o fato da força de Weber satisfazer ao princípio de ação e reação na forma forte ($\vec{F}_{ji}$ paralelo a $\hat{r}_{ij}$). Suponha que não hajam forças externas.

(B) Generalize o resultado anterior para N cargas.

(C) Generalize o resultado anterior para N corpos interagindo entre si por forças de Weber e também por outras forças, desde que elas também satisfaçam ao princípio de ação e reação na forma forte (como é o caso da força gravitacional Newtoniana, da força elástica de Hooke, etc.) Novamente suponha que não hajam forças externas.

2.6 - O objetivo deste exercício é generalizar a lei de conservação de energia para N corpos.

(A) Siga novamente a seção 2.3 refazendo todos os cálculos explicitamente, seguindo os passos indicados, até chegar em (2.16).

(B) Considere agora o caso de três corpos de cargas q_1, q_2 e q_3, e massas m_1, m_2 e m_3, interagindo entre si por forças de Weber (2.1). Defina a energia total do sistema por (U_{ij} sendo dado por (2.9)):

$$E \equiv U_{12} + U_{13} + U_{23} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m^3 v_3^2}{2} .$$

Mostre que $dE/dt = 0$ usando (1.6), (1.7), (2.1), (2.9), e usando um procedimento como o da letra (A).

(C) Generalize o resultado anterior para N corpos usando como energia total a expressão (lembre-se que $U_{ji} = U_{ij}$) :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} U_{ij} + \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} ,$$

onde U_{ij} é dado por (2.9). Mostre então que $dE/dt = 0$.

(D) Generalize ainda mais o resultado anterior supondo que as partículas estão interagindo entre si também através de outras forças conservativas (como através de forças gravitacionais ou elásticas) além da interação eletromagnética de Weber. Suponha para isto que estas outras forças também seguem o princípio de ação e reação e que podem ser derivadas de uma energia potencial que depende apenas da distância entre elas (como é o caso da força gravitacional Newtoniana ou da força elástica Hookiana).

2.7 - Seja U dado por (2.9). Utilize (2.17) como uma definição de $\vec{F}_{ji}$. Fazendo então dU/dt e utilizando o exercício 2.1 mostre que se pode chegar na força de Weber dada por (2.1). Esta é então uma maneira alternativa de chegar na força de Weber sem passar por (2.10).

3) Leis de Força entre Elementos de Corrente

3.1 - Força de Ampère e sua Derivação a partir da Força de Weber

No capítulo anterior apresentamos a lei de Weber e suas principais características. Neste capítulo vamos usar a lei de Weber para derivar a lei de Ampère para a força entre dois elementos de corrente. Este é um dos principais resultados que se pode obter com a força de Weber. Historicamente o caminho utilizado foi o oposto ao que apresentamos aqui, ou seja, Weber obteve sua lei de força a partir da força de Ampère entre elementos de corrente, introduzindo a hipótese de que as correntes elétricas nada mais são do que cargas elétricas usuais em movimento.

O principal resultado experimental obtido por Ampère (1775 - 1836) em suas pesquisas é o de que a força exercida por um elemento de corrente $I_2 d\vec{l}_2$ em um elemento de corrente $I_1 d\vec{l}_1$ é dada por (quando os elementos de corrente são neutros eletricamente)

$$d^2\vec{F}_{21}^A = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}[2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)]\ . \tag{3.1}$$

Trocando-se os índices 1 e 2, observando que $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$, e que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ vem:

$$d^2\vec{F}_{12}^A = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}[2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)] = -d^2\vec{F}_{21}^A\ . \tag{3.2}$$

Ampère chegou neste resultado final em 1823, em seguida a um trabalho experimental e teórico intenso que realizou depois da descoberta fundamental de Oersted, em 1820, da deflexão de uma agulha magnética colocada próxima e paralela a um fio com corrente. Seus principais trabalhos foram publicados em 1825 (Ampère, 1825, 1883 e 1958). A melhor análise do trabalho de Ampère é sem dúvida o livro de Blondel (Blondel, 1982). Uma discussão muito instrutiva se encontra também em (Tricker, 1965). O trabalho fundamental de Oersted já está traduzido em português, com tradução de Roberto de Andrade Martins (Oersted, 1986; e Martins, 1986 a). Para uma excelente discussão do trabalho de Oersted, seus antecedentes e sua influência ver: (Martins, 1986 b). Vale à pena ressaltar que

Maxwell (Maxwell, 1954, artigo 528, pág. 175) chamou à Eq. (3.1) de lei cardinal (mais importante) da eletrodinâmica, e que esta lei sempre deveria permanecer nesta situação. Maxwell tinha tanta admiração por Ampère que o chamou de "Newton da eletricidade." Whittaker diz que este trabalho de 1825 de Ampère é uma "das memórias mais celebradas na história da filosofia natural" (Whittaker, 1973, pág. 83).

Talvez o principal aspecto a ser ressaltado na força de Ampère é o fato de ela satisfazer à terceira lei de Newton na forma forte, qualquer que seja a posição e orientação relativa entre os dois elementos de corrente. Isto é, $d^2\vec{F}^A_{12} = -d^2\vec{F}^A_{21}$ e $d^2\vec{F}^A_{21}$ é paralelo a $\hat{r}_{12}$ qualquer que seja o valor de $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$, $\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1$ e $\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2$.

Weber obteve sua lei de força em 1846 seguindo a hipótese de Fechner (Fechner, 1845) de que a corrente elétrica é constituída de cargas positivas fluindo na direção da corrente e de cargas negativas de mesma magnitude que as cargas positivas ($dq_{1-} = -dq_{1+}$) fluindo na direção oposta, com uma velocidade de mesma intensidade ($\vec{v}_{1-} = -\vec{v}_{1+}$). Sugerimos os livros de Maxwell (Maxwell, 1954, Vol. 2, Capítulo 23), de Whittaker (Whittaker, 1973, págs. 200 a 211) e de O'Rahilly (O'Rahilly, 1965, págs. 102 a 113 e 518 a 523) para quem estiver interessado em seguir o procedimento seguido por Weber.

No exercício 3.1 (um desenvolvimento mais completo se encontra em (Assis, 1990 b)) está indicado o caminho oposto, ou seja, para se **derivar** a Eq. (3.1) a partir da força de Weber, (2.1) ou (2.4). Para isto tem-se de usar a relação usual entre um elemento de corrente e as cargas em movimento, relação também introduzida por Fechner e Weber, e dada por (no caso de elementos de corrente filiformes neutros eletricamente):

$$I_1 d\vec{l}_1 = \lambda_{1+} dl_1 \vec{v}_{1+} + \lambda_{1-} dl_1 \vec{v}_{1-} = \lambda_{1+} dl_1 (\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-}) \ , \tag{3.3}$$

$$I_2 d\vec{l}_2 = \lambda_{2+} dl_2 \vec{v}_{2+} + \lambda_{2-} dl_2 \vec{v}_{2-} = \lambda_{2+} dl_2 (\vec{v}_{2+} - \vec{v}_{2-}) \ . \tag{3.4}$$

Nestas expressões λ_{i+} (λ_{i-}) são as densidades lineares de carga (quantidade de carga por unidade de comprimento) positiva (negativa) dos elementos de corrente $I_i d\vec{l}_i$, $i = 1,\ 2$. A condição de neutralidade elétrica significa que $\lambda_{i-} = -\lambda_{i+}$.

O ponto importante deste exercício é que se consegue derivar (3.1) sem usar a hipótese

de Fechner de que as cargas positivas e negativas numa corrente se movem em direções contrárias com velocidades de mesma magnitude (hoje em dia sabe-se que isto não é correto e que num fio metálico usual apenas as cargas negativas (os elétrons) se movem). Ou seja, partindo da lei de Weber, de (3.3) e de (3.4) chega-se em (3.1) mesmo quando apenas uma das cargas se move (como no caso de um fio metálico comum), ou quando ambas se movem em sentido contrário mas com velocidades de diferente magnitude (como num plasma gasoso usual onde a razão entre a velocidade dos íons e dos elétrons está como o inverso da razão entre as massas, isto é, $v_1 \simeq -(m_2/m_1)v_2$). Isto mostra que a força de Ampère pode ser usada não apenas em correntes metálicas, mas também em plasmas gasosos, situações de eletrólise, etc.

Um outro aspecto importante que se pode observar ao realizar este exercício é que a expressão (3.1) continua válida em situações onde as cargas estão aceleradas. Isto é, não é necessário impor que os termos de aceleração são nulos em (2.4) para se chegar em (3.1). Isto indica que a força de Ampère pode ser aplicada mesmo em situações não estacionárias quando as correntes estão variando no tempo (como em circuitos com corrente alternada ou quando se liga ou desliga a corrente num circuito).

Calculamos agora a energia potencial entre dois elementos de corrente neutros eletricamente $I_1 d\vec{l}_1$ e $I_2 d\vec{l}_2$ de acordo com a lei de Weber, utilizando (2.9). Seu valor é o mesmo que o trabalho necessário para trazer os dois elementos de corrente desde uma distância infinita até as posições e orientações finais, e é dada por

$$d^2U = d^2U_{2+,\,1+} + d^2U_{2+,\,1-} + d^2U_{2-,\,1+} + d^2U_{2-,\,1-} \ . \tag{3.5}$$

Utilizando (3.3) e (3.4) podemos escrever esta expressão como

$$d^2U = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \ . \tag{3.6}$$

3.2 - Força de Grassmann e Lei de Biot-Savart

Apesar dos elogios de Maxwell, Whittaker e outros, a força de Ampère (3.1) é pouco conhecida hoje em dia e não aparece mais em quase nenhum livro didático (nem nos elementares a nível de ciclo básico, nem nos avançados a nível de pós-graduação). Em vez disto só aparece a força de Grassmann dada por

$$d^2\vec{F}_{21}^G = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2 \ , \tag{3.7}$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^2}(I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}) \ . \tag{3.8}$$

Nesta última expressão $d\vec{B}_2$ é o campo magnético gerado pelo elemento $I_2 d\vec{l}_2$. Esta expressão para $d\vec{B}_2$ é conhecida como lei de Biot-Savart (Biot e Savart, 1820 e 1821). Esta expressão de força foi primeiro apresentada por Grassmann em 1845 (Grassmann, 1845).

Grassmann nunca teve uma educação formal em física e matemática (estudou como curso superior filologia e teologia). Durante toda a vida foi professor de matemática no segundo grau e nunca chegou a lecionar numa universidade, embora sempre almejasse por isso. Seu principal trabalho científico foi o desenvolvimento de uma álgebra generalizada onde não necessariamente valiam as propriedades comutativa e a de existência do inverso na multiplicação. Publicou seus resultados num livro em 1844 (apenas um ano depois da descoberta dos quatérnions por Hamilton), e numa segunda versão ampliada e melhorada em 1862. É no seu primeiro livro que apareceu claramente pela primeira vez os modernos produtos escalares e vetoriais. Em 1845 publicou sua lei de força entre elementos de corrente como sendo uma aplicação importante de sua álgebra generalizada. Aparentemente Grassmann nunca realizou experiências em física, nem mesmo relacionadas com eletrodinâmica. Para estas e outras informações ver: (Crowe, 1985).

Biot e Savart anunciaram sua expressão para o campo magnético em 30 de outubro de 1820. Obtiveram este resultado estudando a interação de um longo fio retilíneo (com corrente) com um ímã permanente. Fizeram estas experiências motivados, assim como

Ampère, pelo anúncio da descoberta de Oersted, anúncio este feito em 11 de setembro de 1820, por Arago, na Academia Francesa de Ciências (Whittaker, 1973, págs. 81 a 88).

Usando que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \ , \tag{3.9}$$

pode-se colocar (3.7) e (3.8) na forma

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\hat{r}_{12} - (d\vec{l}_1 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_2] \ . \tag{3.10}$$

Trocando-se os índices 1 e 2, observando que $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$, e que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ vem:

$$d^2 \vec{F}_{12}^G = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = -I_2 d\vec{l}_2 \times \left[\frac{\mu_o}{4\pi} \left(I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) \right]$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\hat{r}_{12} - (d\vec{l}_2 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_1] \neq -d^2 \vec{F}_{21}^G \ . \tag{3.11}$$

A primeira coisa que se pode observar nestas expressões é que embora o primeiro termo da força satisfaça ao princípio de ação e reação e seja paralelo a $\hat{r}_{12}$, o mesmo não acontece com o segundo termo que é paralelo a $d\vec{l}_2$ ou a $d\vec{l}_1$. Este segundo termo não satisfaz ao princípio de ação e reação a não ser em alguns casos bem particulares. Isto faz com que em muitos casos $d^2 \vec{F}_{21}^G \neq -d^2 \vec{F}_{12}^G$ quando usamos a expressão da força de Grassmann entre elementos de corrente. Ou seja, quando se usam elementos de corrente há casos em que a expressão de Grassmann não satisfaz ao princípio de ação e reação nem mesmo na forma fraca. Estamos aqui restringindo a análise ao caso de elementos de corrente, contudo mais para frente discutiremos o caso de circuitos fechados.

3.3 - Derivação da Força de Grassmann a partir da Força de Lorentz

Nesta seção vamos mostrar como se chega em (3.7) usando a força de Lorentz (1.32). Novamente o caminho histórico foi o inverso já que Lorentz conhecia a força de Grassmann e partiu dela fazendo a substituição $q\vec{v}$ por $Id\vec{l}$ para chegar na componente magnética de sua força (Lorentz, 1915, págs. 14 e 15); (O'Rahilly, 1965, p. 561).

Assim como no caso de Weber e do exercício 3.1 supomos que nos dois elementos de corrente hajam cargas positivas e negativas dq_{1+}, dq_{1-}, dq_{2+} e dq_{2-}. Vamos supor que o elemento de corrente $I_2 d\vec{l}_2$ gere um campo elétrico $d\vec{E}_2$ (caso ele não seja neutro) e um campo magnético $d\vec{B}_2$. Somando as forças (1.32) sobre as cargas positivas e negativas de $I_1 d\vec{l}_1$ vem:

$$d^2\vec{F}_{21} = (dq_{1+} + dq_{1-})d\vec{E}_2 + (dq_{1+}\vec{v}_{1+} + dq_{1-}\vec{v}_{1-}) \times d\vec{B}_2 \ . \qquad (3.12)$$

Impondo a neutralidade elétrica dos elementos de corrente ($dq_{1-} = -dq_{1+}$ e $dq_{2-} = -dq_{2+}$) vem que o primeiro termo de (3.12) se anula já que $dq_{1+} + dq_{1-} = 0$ e também $d\vec{E}_2 = 0$. Usando (3.3) se chega então em (3.7), CQD. Para se chegar em (3.10) é necessário ainda algo como a lei de Biot-Savart (3.8) relacionando a corrente nas fontes com os campos magnéticos que elas geram. Ver ainda o exercício 3.3.

Uma outra dedução da força de Grassmann a partir da força de Lorentz usando os potenciais retardados de Lienard-Wiechert se encontra no capítulo 5.

3.4 - Ampère contra Grassmann

Nesta seção vamos comparar as leis de força entre elementos de corrente obtidas por Ampère e Grassmann, e discutir alguns experimentos recentes que têm sido realizados para se tentar distinguir entre as duas leis.

O primeiro aspecto a ser salientado, e que já foi comentado anteriormente, é que a força de Ampère (3.1) sempre satisfaz à terceira lei de Newton (ação e reação), e ainda por cima na forma forte. Já a lei de Grassmann não satisfaz em geral ao princípio de ação e reação nem mesmo na forma fraca. Um exemplo disto é o caso apresentado na figura 3.1 (ver exercício 3.4):

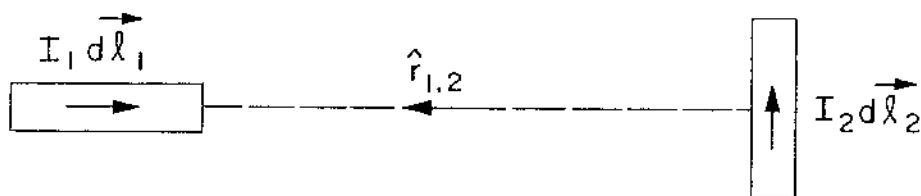



Figura 3.1

Pela força de Ampère temos

$$d^2\vec{F}^A_{21} = d^2\vec{F}^A_{12} = 0 \ . \tag{3.13}$$

Já por Grassmann vem que

$$d^2\vec{F}^G_{21} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{I_1 I_2}{r^2_{12}} dl_1\ d\vec{l}_2 \neq 0 \ , \tag{3.14}$$

$$d^2\vec{F}^G_{12} = 0 \ . \tag{3.15}$$

Isto é, de acordo com a lei de Grassmann o elemento $I_1 d\vec{l}_1$ não fará força em $I_2 d\vec{l}_2$, enquanto que $I_2 d\vec{l}_2$ fará uma força não nula em $I_1 d\vec{l}_1$.

Apesar de alguns livros didáticos apresentarem este exemplo, é usualmente argumentado que elementos de corrente não existem e que na realidade temos apenas correntes fechadas, quando então também Grassmann satisfaria ao princípio de ação e reação. Como veremos no decorrer desta seção, a situação real pode não ser bem assim. Antes de chegar neste ponto vamos discutir um fato importante que mostra porque por muito tempo se pensou serem indistinguíveis as duas leis.

Este fato pode ser expresso assim: A força de um circuito fechado num elemento de corrente de um outro circuito é a mesma quando calculada pela força de Ampère ou por Grassmann. Uma prova deste fato marcante se encontra em: (Tricker, 1965, págs. 55 a 58). Uma outra prova, usando propriedades mais avançadas do cálculo vetorial, se encontra delineada no exercício 3.7. A razão principal deste fato é que se fizermos a diferença entre (3.1) e (3.10) obtemos como resultado uma diferencial exata cuja integral ao longo de todo o circuito fechado 2 é nula.

Seguem abaixo alguns teoremas (ver exercício 3.5) e resultados importantes utilizados no exercício 3.7:

$$\nabla_1 \frac{1}{r_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{r_{12}} = -\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ , \tag{3.16}$$

$$\nabla_1 \times \hat{r}_{12} = \nabla_2 \times \hat{r}_{12} = 0 \ , \tag{3.17}$$

$$\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) = -\frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} + (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}} \ , \tag{3.18}$$

$$\nabla_1(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) = \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}} - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}} \ , \tag{3.19}$$

$$\nabla_1(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1}) = \frac{d\vec{l_1}}{r_{12}} - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$+\frac{1}{r_{12}}[(x_1 - x_2)\nabla_1 dl_{1x} + (y_1 - y_2)\nabla_1 dl_{1y} + (z_1 - z_2)\nabla_1 dl_{1z}] \;, \tag{3.20}$$

$$\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2}) = -\frac{d\vec{l_2}}{r_{12}} + (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$-\frac{1}{r_{12}}[(x_1 - x_2)\nabla_2 dl_{2x} + (y_1 - y_2)\nabla_2 dl_{2y} + (z_1 - z_2)\nabla_2 dl_{2z}] \;, \tag{3.21}$$

$$\nabla_1(d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2}) = dl_{2x}\nabla_1 dl_{1x} + dl_{2y}\nabla_1 dl_{1y} + dl_{2z}\nabla_1 dl_{1z} \;, \tag{3.22}$$

$$\nabla_2(d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2}) = dl_{1x}\nabla_2 dl_{2x} + dl_{1y}\nabla_2 dl_{2y} + dl_{1z}\nabla_2 dl_{2z} \;. \tag{3.23}$$

Embora possa parecer que $\nabla_1 dl_{1x} = 0$, isto não é sempre verdade. Por exemplo, vamos supor uma espira circular de raio $R = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$ centrada na origem e na qual circula uma corrente no sentido anti-horário. Logo, usando coordenadas polares,

$$d\vec{l_1} = (Rd\theta)\hat{\theta}_1 = Rd\theta(\hat{y}\cos\theta_1 - \hat{x} \;\sin\; \theta_1)$$

$$= Rd\theta\left(\frac{-y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}}\hat{x} + \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}}\hat{y}\right)$$

$$= -d\theta(y_1 \;\hat{x} - x_1\hat{y}) = \hat{x}dl_{1x} + \hat{y}dl_{1y} \;. \tag{3.24}$$

Com (1.17) vem:

$$\nabla_1 dl_{1x} = -d\theta\left(\hat{x}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \hat{y}\frac{\partial y_1}{\partial y_1}\right) = d\theta(\hat{x}\frac{x_1}{y_1} - \hat{y}) \neq 0 \;. \tag{3.25}$$

Esta semelhança das duas forças neste caso (força de um circuito fechado sobre um elemento de um outro circuito) fez com que muitos pensassem que ambas as forças sempre dessem o mesmo resultado. Aliando-se a isto o fato de a força de Grassmann ser muitas vezes mais fácil de integrar do que a de Ampère fez com que ao longo do tempo a força de Ampère fosse sendo deixada de lado em favor da de Grassmann. Cremos que outro motivo para a força de Ampère ter sido deixada de lado é que a teoria da relatividade restrita é baseada no conjunto das equações de Maxwell mais a força de Lorentz. Acontece que Grassmann é compatível com a força de Lorentz (basta substituir $I_1 d\vec{l}_1$ por $q_1 \vec{v}_1$ em (3.7)), enquanto que a força de Ampère não o é. Devido ao sucesso e popularidade da relatividade restrita, tudo aquilo que não fosse compatível com a força de Lorentz foi abandonado. Só que nos últimos anos as leis de Ampère e de Weber têm voltado a ser consideradas seriamente por motivos experimentais que indicamos a seguir. Antes de prosseguir vale lembrar que o próprio Maxwell não apenas conhecia a força de Grassmann, mas preferia a força de Ampère à de Grassmann. Por exemplo, no artigo 527 de sua obra máxima Maxwell afirma, depois de citar as forças de Grassmann e Ampère, que "a força de Ampère é sem dúvida a melhor, pois ela é a única que faz as forças sobre os dois elementos não apenas iguais e opostas mas ao longo da linha reta que os une." Isto é, Maxwell preferia a força de Ampère por ela sempre seguir a forma forte da lei de ação e reação de Newton. Ver: (Maxwell, 1954, artigo 527, pág. 174).

Voltando agora à distinção entre as duas forças. O resultado de que a força de um circuito sobre um elemento é a mesma por Ampère e por Grassmann vale se o circuito for fechado e se o elemento de corrente que sente a força não fizer parte deste mesmo circuito. Caso estejamos calculando a força do restante do circuito numa parte dele mesmo então este resultado pode deixar de ser válido. O ponto principal é que isto também pode ser realizado na prática, ou seja, pode-se detectar e medir a força em parte de um circuito devido ao restante dele mesmo. A técnica experimental utilizada é ligar as duas partes de um mesmo circuito sólido metálico por mercúrio líquido, como indicado nas figuras abaixo

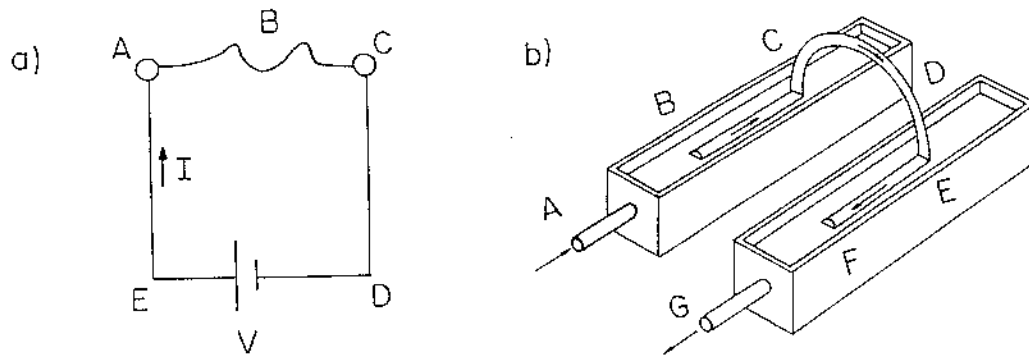



Figura 3.2

Na figura (A) temos mercúrio líquido nas regiões A e C, e a parte do circuito ABC é livre para mover-se na horizontal e na vertical quando flui a corrente I. Com isto caso o restante do circuito $CDEA$ faça uma força resultante sobre ABC, esta pode em princípio ser detectada e medida. A vantagem do mercúrio líquido é que como ele é condutor pode-se estudar o movimento e a força sobre a parte ABC sem interromper a corrente. Na figura (B) temos uma representação da famosa ponte de Ampère. A ponte $BCDEF$ move-se para a frente quando passa corrente no circuito, deslizando livremente sobre o mercúrio das duas tinas. Ampère bolou este experimento para comprovar a existência das forças longitudinais previstas por sua força.

O próximo aspecto que vamos discutir aqui é uma outra situação do tipo da figura 3.1, isto é, a força entre dois elementos de corrente paralelos e colineares:

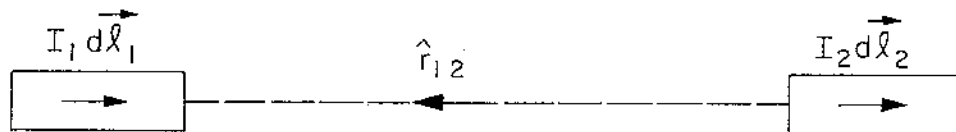



Figura 3.3

Usando (3.1) a (3.11) obtemos (ver exercício 3.4):

$$d^2\vec{F}_{21}^A = \frac{\mu_o}{4\pi}I_1I_2\frac{dl_1dl_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -d^2\vec{F}_{12}^A \ , \tag{3.26}$$

$$d^2\vec{F}_{21}^G = 0 = d^2\vec{F}_{12}^G \ . \tag{3.27}$$

Neste caso particular vemos que Grassmann satisfaz ao princípio de ação e reação não prevendo nenhuma força de um elemento sobre o outro. Por outro lado Ampère também satisfaz ao princípio de ação e reação mas prevê uma força de repulsão entre os elementos de corrente. E é usando exatamente este fato que têm sido realizados recentemente uma série de experiências com circuito único (já vimos anteriormente que Ampère e Grassmann são indistinguíveis quando se trata da interação entre dois circuitos fechados) para se tentar distinguir experimentalmente entre as duas forças. Todos os experimentos de que temos notícia confirmam a repulsão prevista por Ampère em (3.26). Estes experimentos tratam da propulsão a jato em líquidos (Graneau, 1982 a); dos aceleradores de projéteis (railgun accelerators), (Graneau, 1982 b, 1985 a, 1986, 1987 a, 1987 b); do fenômeno de explosão de fios (Graneau 1983, 1984, 1985 b e 1987 c), (Nasilowski, 1985), (Aspden, 1987); das explosões eletrodinâmicas em líquidos (Graneau e Graneau, 1985), (Azevedo e outros, 1986), (Aspden, 1986); e do pêndulo de impulso eletromagnético (Pappas, 1983), (Graneau e Graneau, 1986), (Pappas e Moyssides, 1985), (Moyssides e Pappas, 1986).

Por exemplo, nos experimentos de explosão de fios passa-se uma alta corrente num fio metálico usual e observa-se que este fio se rompe em vários pedaços. Este fenômeno já era observado há muito tempo mas pensava-se que os rompimentos eram devidos ao derretimento do fio em algumas partes devido ao efeito Joule. Foi então que se fez uma fotografia com microscópio eletrônico das partes fragmentadas e se observou que os fios eram rompidos no estado sólido por características de tração e não de fusão (Graneau, 1983). A única explicação para estes fatos, compatível com os dados experimentais, tem sido baseada na força de repulsão de Ampère, (3.1) e (3.26).

Contudo deve ser enfatizado que a controvérsia Ampère contra Grassmann ainda é uma questão em aberto e muita discussão baseada em argumentos matemáticos

e experimentos físicos está ocorrendo na literatura. Alguns exemplos relevantes: (Christodoulides, 1987), (Strnad, 1989), (Cornille, 1989), (Whitney, 1988), (Rambaut e Vigier, 1990), (Moyssides, 1989 a, b, c), (Phipps, 1986; e 1990 a), (Phipps e Phipps, 1990), (Graneau, 1989 a, b), (Graneau, Thompson e Morrill, 1990), (Wesley, 1987 a, b; 1990 a, b; e 1991, Capítulo 6).

Em geral trabalhamos com correntes filiformes, mas às vezes também ocorre de termos corrente elétrica fluindo sobre uma superfície ou por sobre um certo volume, e não apenas por uma linha. Sendo σ a densidade superficial de carga (carga por unidade de área) e ρ a densidade volumétrica de carga vem que todos os resultados anteriores podem ser mantidos substituindo $Id\vec{l}$ por $\vec{K}da$ ou por $\vec{J}dV$, onde $\vec{K}$ é a densidade superficial de corrente e $\vec{J}$ a densidade volumétrica de corrente. Em particular temos, no caso de elementos de corrente neutros eletricamente ($i = 1,\ 2$ e $j = 2,\ 1$):

$$\vec{K}_i da_i = \sigma_{i+} da_i (\vec{v}_{i+} - \vec{v}_{i-}) \ , \tag{3.28}$$

$$\vec{J}_i dV_i = \rho_{i+} dV_i (\vec{v}_{i+} - \vec{v}_{i-}) \ . \tag{3.29}$$

Já as forças entre os elementos de corrente de Ampère e de Grassmann ficam nas formas

$$d^4 \vec{F}_{ji}^{A\ \mathrm{sup}} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} [2(\vec{K}_i \cdot \vec{K}_j - 3(\hat{r}_{ij} \cdot \vec{K}_i)\ (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{K}_j)] da_i da_j \ , \tag{3.30}$$

$$d^4 \vec{F}_{ji}^{G\ \mathrm{sup}} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{1}{r_{ij}^2} [(\vec{K}_i \cdot \vec{K}_j)\hat{r}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{K}_i)\vec{K}_j] da_i da_j \ , \tag{3.31}$$

$$d^6 \vec{F}_{ji}^{A\ \mathrm{vol}} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} [2(\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j) - 3(\hat{r}_{ij} \cdot \vec{J}_i)\ (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{J}_j)] dV_i dV_j \ , \tag{3.32}$$

$$d^6 \vec{F}_{ji}^{G\ \mathrm{vol}} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\ \frac{1}{r_{ij}^2} [(\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j)\hat{r}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{J}_i)\vec{J}_j] dV_i\ dV_j \ . \tag{3.33}$$

Concluindo esta seção vamos ressaltar uma vez mais (Tricker, 1965, págs. 55 a 58; e o exercício 3.7 desta seção) que a partir da força de Ampère (3.1) se **deriva** que a força de um circuito fechado $\mathcal{C}_2$ sobre um elemento de corrente $I_1 d\vec{l}_1$ é dada por

$$d\vec{F}^A_{\mathcal{C}_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B} \ , \tag{3.34}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ . \tag{3.35}$$

A força de Ampère (3.1) veio como um resultado experimental de suas pesquisas, e para chegar em (3.34) e (3.35) foram usadas apenas manipulações matemáticas a partir de (3.1). Logo não é necessário postular inicialmente um campo magnético como o de Biot-Savart (3.8) já que o resultado acima foi *derivado* de (3.1). Para reforçar este ponto vale lembrar que um dos resultados experimentais obtidos por Ampère para chegar em (3.1) é o de que "a força de um circuito fechado de forma arbitrária exercida sobre um elemento de corrente de um outro circuito é perpendicular a este elemento" (Ampère, 1825), (Whittaker, 1973, págs. 83-87), (Maxwell, 1954, Vol. 2, Cap. 2, págs. 161-2). E o produto vetorial em (3.34) indica exatamente isto, já que um vetor $\vec{C}$ obtido por $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é ortogonal tanto a $\vec{A}$ quanto a $\vec{B}$.

3.5 - Derivação da Lei Circuital de Ampère e da Lei de Não Existência de Monopólos Magnéticos

Nesta seção vamos tratar da derivação da lei circuital de Ampère. É assim que se chama a equação (1.49), às vezes sem o termo em $d\Phi_E/dt$. Vamos também derivar outra das equações de Maxwell, isto é, a lei de não existência de monopólos magnéticos. Para derivar estas duas leis vamos seguir o procedimento do Jackson (Jackson, 1975, Seção 5.3).

Como já vimos na seção 1.4 (ver também exercício 1.3) esta lei circuital de Ampère (1.49) pode ser derivada diretamente de (1.42). Vamos então nos concentrar na derivação desta lei e da (1.43) a partir da força entre elementos de corrente. O principal resultado a que Ampère chegou em suas extensas e precisas pesquisas experimentais, aquilo que é realmente a lei de Ampère, é sua lei de força entre elementos de corrente dada por (3.1). Tudo o mais que ele fez foi a partir desta lei. Veremos que se pode derivar (1.42) e (1.43) a partir desta lei desde que se assuma também a equação de continuidade de cargas, (1.45).

Na formulação de Maxwell há apenas correntes fechadas (ímãs interagindo com ímãs, ímãs interagindo com correntes fechadas, correntes fechadas interagindo com outras correntes fechadas, etc.) Nos restringindo então ao campo magnético gerado por correntes fechadas, podemos usar tanto (3.1) quanto (3.34) e (3.35); ou então (3.7) e (3.8), ou (3.10) para a força deste circuito fechado num elemento de corrente de um outro circuito já que todas elas dão o mesmo resultado (ver exercício 3.7). Usaremos então (3.34) e (3.35) daqui por diante.

Substituindo então $I_2 d\vec{l}_2$ por $\vec{J} dV_2$ e integrando a expressão do campo magnético gerado pelo circuito 2 em todo o espaço podemos obter o campo magnético gerado no ponto onde se encontra o elemento $I_1 d\vec{l}_1$ (ou $\vec{J}_1 dV_1$) como sendo dado por

$$\vec{B}(\vec{r}_1,\ t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\int\int \vec{J}(\vec{r}_2,\ t) \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} dV_2\ . \qquad (3.36)$$

Nesta expressão deixamos $\vec{J}$ depender não só da posição no circuito mas também do tempo já que queremos tratar do caso geral das intensidades das correntes podendo variar explicitamente no tempo. Apesar disto vamos supor os circuitos fixos no espaço de tal

forma que $\hat{r}_{12}$, $\vec{r}_{12}$ e r_{12} não dependam do tempo.

Lembrando do resultado (3.16), ver exercício 3.5, vem que pode-se escrever $\hat{r}_{12}/r_{12}^2$ como $-\nabla_1(1/r_{12})$. Como ∇_1 só atua na variável 1 este operador gradiente pode ser tirado para fora da integral. Lembrando que

$$\nabla \times (u\, \vec{G}) = (\nabla u) \times \vec{G} + u(\nabla \times \vec{G}) \ , \tag{3.37}$$

$$\vec{G}_1 \times \vec{G}_2 = -\vec{G}_2 \times \vec{G}_1 \ , \tag{3.38}$$

vem que

$$\vec{B}(\vec{r}_1,\, t) = \frac{\mu_o}{4\pi}\, \nabla_1 \times \left(\int\int\int \frac{\vec{J}(\vec{r}_2,\, t)}{r_{12}} dV_2 \right) . \tag{3.39}$$

Aplicando o divergente em ambos os lados desta equação e usando (1.46) obtemos a equação (1.43) da não existência de monopólos magnéticos. Deve-se observar que para chegar neste resultado não foi necessário utilizar a equação de continuidade.

Na seção 2.1 havíamos visto que com a lei de Weber se derivava a lei de Gauss, primeira das equações de Maxwell. Já vimos na seção 3.1 que com ela também se deriva a força de Ampère (3.1). Acabamos de ver que com a força de Ampère se deriva a terceira das equações de Maxwell, isto é, a lei da não existência de monopólos magnéticos. Vamos agora seguir esta linha de raciocínio para derivar a partir da força de Ampère a segunda das equações de Maxwell, isto é, a chamada lei circuital de Ampère.

Aplicando agora o rotacional em ambos os lados desta equação e usando que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G} \ , \tag{3.40}$$

obtem-se, após introduzir novamente os operadores e lembrando que

$$\nabla \cdot (u\, \vec{G}) = u \nabla \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \nabla u \ , \tag{3.41}$$

e com isto vem

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1,\ t) = \frac{\mu_o}{4\pi}\nabla_1\Big(\int\int\int \vec{J}\cdot\nabla_1\frac{1}{r_{12}}dV_2\Big)$$

$$-\frac{\mu_o}{4\pi}\int\int\int \vec{J}(\vec{r}_2,\ t)\nabla_1^2\frac{1}{r_{12}}dV_2\ . \tag{3.42}$$

Para resolver-se esta segundo integral tem-se de usar um outro resultado da análise vetorial, isto é:

$$\nabla_1^2\frac{1}{r_{12}} = -4\pi\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\ , \tag{3.43}$$

onde $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ é conhecida como a função delta de Dirac. Esta função tem as seguintes propriedades, como já vimos anteriormente:

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0 \quad \text{para} \quad \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2\ , \tag{3.44}$$

$$\int\int\int_{V_2} f(\vec{r}_2)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)dV_2$$

$$\left\{\begin{array}{l} = f(\vec{r}_1)\ \text{ se }\ V_2\ \text{ contem }\ \vec{r}_1\ , \\ = 0\ \text{ se }\ V_2\ \text{ não contem }\ \vec{r}_2\ . \end{array}\right\} \tag{3.45}$$

Usando também (3.16) na primeira integral de (3.42) obtemos:

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1,\ t) = \mu_o\vec{J}(\vec{r}_1,\ t) - \frac{\mu_o}{4\pi}\nabla_1\int\int\int \vec{J}(\vec{r}_2,\ t)\cdot\nabla_2\frac{1}{r_{12}}dV_2\ . \tag{3.46}$$

Só falta agora obter a última integral. Usando novamente (3.41) obtemos, usando também (1.39):

$$\int\int\int \vec{J}(\vec{r}_2,\ t)\cdot\nabla_2\frac{1}{r_{12}}dV_2 = \int\int \frac{\vec{J}(\vec{r}_2,\ t)}{r_{12}}\cdot d\vec{a}_2$$

$$-\int\int\int \frac{1}{r_{12}}\nabla_2\cdot\vec{J}(\vec{r}_2,\ t)dV_2\ . \tag{3.47}$$

Lembrando que estamos integrando em todo o espaço vem que a integral de superfície que aparece em (3.47) é feita no infinito. Supondo que o circuito 2 é limitado no espaço e que não se estende ao infinito, vem que esta integral é nula.

Usando agora a equação de continuidade (1.45) em (3.47), lembrando que $\vec{J} = \rho\vec{v}$, vem que (3.46) vai ficar na forma ($\partial/\partial t$ pode sair para fora da integral pois não atua em r_{12}, já que é apenas uma derivada parcial):

$$\nabla_1 \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} - \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_1 \int\int\int \frac{\rho(\vec{r}_2,\ t)}{r_{12}} dV_2 \ . \tag{3.48}$$

De (1.16), substituindo-se a distribuição discreta de cargas por uma contínua ($q \to \rho dV$, $\sum \to \int\int\int$), vem que o potencial escalar elétrico de Poisson fica na forma:

$$\phi(\vec{r}_1,\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\int\int \frac{\rho(\vec{r}_2,\ t)}{r_{12}} dV_2 \ . \tag{3.49}$$

Jogando (3.49) em (3.48) obtem-se, lembrando da definição do campo elétrico em (1.18):

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1,\ t) = \mu_o \vec{J}(\vec{r}_1,\ t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}_1,\ t) \ . \tag{3.50}$$

E esta é a equação (1.42) que queríamos derivar.

O fato que deve ser ressaltado nesta derivação é que para se chegar em (1.42) foi usado, além da lei de força entre elementos de corrente, a equação de continuidade para cargas elétricas. Isto mostra que a lei circuital de Ampère pode ser derivada ou do campo magnético de Biot-Savart ou da força de Ampère na forma (3.34) e (3.35), desde que se assuma também a equação de conservação de cargas. É importante ressaltar que a corrente de deslocamento, o termo em $\partial\vec{E}/\partial t$ em (3.50) ou (1.42), já surge naturalmente nesta derivação. E já vimos no capítulo 1 como se chega na lei circuital de Ampère integrada, (1.49), a partir desta forma diferencial.

como curiosidade histórica vale informar que mesmo a conhecida "lei circuital de Ampère," isto é, (1.49) ou (1.42) **sem** o termo de corrente de deslocamento, não foi obtida pelo próprio Ampère, mas sim por Maxwell em 1856, 20 anos após a morte de Ampère

(ver Whittaker, 1973, Vol. 1, págs. 242 a 245). Como já ressaltamos mais de uma vez, o principal resultado obtido por Ampère em suas experiências foi sua expressão para a força entre elementos de corrente (3.1). De qualquer forma parece justo chamar (1.49) de lei circuital de "Ampère," e não de "Biot-Savart," nem de "Grassmann," já que Maxwell sempre trabalhou com a força de Ampère (3.1) e quase nunca com a de Grassmann, (3.7) e (3.8), embora conhecesse a todas elas.

Sobre Ampère, sua vida e sua obra, ver ainda: (Blondel, 1982; Tricker, 1962; e Caneva, 1980). Para uma discussão histórica do assunto deste capítulo e correlatos ver também: (Thomson, 1885; e Arzeliès, 1972, págs. 198 a 209).

Recapitulando, no capítulo 2 havíamos visto que de Weber se chega em Coulomb e então a Gauss, a primeira das equações de Maxwell. Neste capítulo vimos que de Weber se chega na força de Ampère entre elementos de corrente e que a partir desta força se chegam em outras equações de Maxwell: a lei circuital de Ampère e a lei de não existência de monopólos magnéticos. Para completar a prova da compatibilidade da força de Weber com as equações de Maxwell só falta derivar a partir de Weber a lei de indução de Faraday. Este é o assunto do próximo capítulo.

3.6 - Exercícios

3.1 - Neste exercício vai-se derivar a força de Ampère (3.1) a partir da força de Weber. Este exercício está baseado em (Assis, 1990 b).

A forma mais fácil de fazê-lo é usando a força de Weber na forma (2.4). Suponha então cada elemento de corrente $I_i d\vec{l}_i$ como consistindo de cargas positivas e negativas, com velocidades $\vec{v}_{i+}$ e $\vec{v}_{i-}$, e acelerações $\vec{a}_{i+}$ e $\vec{a}_{i-}$, respectivamente. Vamos supor circuitos filiformes tal que as densidades lineares de carga sejam dadas por λ_{1+}, λ_{1-}, λ_{2+} e λ_{2-}. Isto significa que a quantidade de carga em cada elemento de corrente é dada por $dq_{1+} = \lambda_{1+} dl_1$, $dq_{1-} = \lambda_{1-} dl_1$, $dq_{2+} = \lambda_{2+} dl_2$ e $dq_{2-} = \lambda_{2-} dl_2$. Suponha também que eles são neutros eletricamente, isto é, $dq_{1-} = -dq_{i+}$, ou $\lambda_{i-} = -\lambda_{i+}$. Como os elementos de corrente têm tamanho infinitesimal vem: $\vec{r}_{i+} = \vec{r}_{i-} = \vec{r}_i$.

(A) Obtenha a força do elemento 2 no elemento 1 somando as quatro componentes da força:

$$d^2\vec{F}_{21} = d^2\vec{F}_{2+,\ 1+} + d^2\vec{F}_{2+,\ 1-} + d^2\vec{F}_{2-,\ 1+} + d^2\vec{F}_{2-,\ 1-} \ .$$

Observe que no resultado final a parte Coulombiana e a parte de aceleração em (2.4) vão a zero.

(B) Finalmente utilize (3.3) e (3.4) para colocar o resultado da parte (A) na forma da equação (3.1).

3.2 - Agora vamos obter a energia potencial entre dois elementos de corrente de acordo com a lei de Weber.

(A) Suponha as mesmas coisas que no exercício 3.1.

(B) Obtenha a energia potencial entre dois elementos de corrente eletricamente neutros a partir de (2.9), adicionando as contribuições dos grupos de cargas:

$$d^2U = d^2U_{2+,\ 1+} + d^2U_{2+,\ 1-} + d^2U_{2-,\ 1+} + d^2U_{2-,\ 1-} \ .$$

(C) Utilize (3.3) e (3.4) no resultado anterior para colocá-lo na forma (3.6).

3.3 - Neste exercício vai-se derivar a força de Grassmann (3.7) a partir da força de Lorentz (1.32).

(A) Suponha as mesmas coisas que no exercício 3.1.

(B) Obtenha a força do elemento 2 no elemento 1 somando as quatro componentes da força, como no exercício 3.1, mas agora usando (1.32) em vez da força de Weber.

(C) Use (3.3) para colocar este resultado na forma da força de Grassmann (3.7).

3.4 - (A) Use as expressões (3.1) e (3.10) para calcular a força exercida pelo elemento $I_2 d\vec{l_2}$ no elemento $I_1 d\vec{l_1}$ usando Ampère e Grassmann na situação mostrada na figura 3.1. Em seguida use (3.2) e (3.11) para calcular a força de $I_1 d\vec{l_1}$ em $I_2 d\vec{l_2}$ e confirme que enquanto para Ampère vale o princípio de acão e reação, o mesmo já não ocorre com Grassmann.

(B) Repita o procedimento anterior no caso da figura 3.3. Nesta situação apesar de haver ação e reação tanto para Ampère quanto para Grassmann, vai haver uma repulsão entre os elementos de corrente de acordo com Ampère, e nenhuma repulsão ou atração de acordo com Grassmann.

3.5 - Prove usando componentes retangulares Cartesianas as relações (3.16) a (3.23).

3.6 - Uma função que vai ser usada no próximo exercício e no capítulo 4 é dada por

$$G \equiv \oint_{C_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}} \ .$$

(A) Use o teorema de Stokes, (1.40), e as relações (3.37) e (3.17) para colocar G na forma

$$G = \int\int_{S_2} \left\{ \left[\nabla_2 \left(\frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})}{r_{12}} \right) \right] \times \hat{r}_{12} \right\} \cdot d\vec{a}_2 \ .$$

(B) Use $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, a relação (3.18) e o fato de $\hat{r}_{12} \times \hat{r}_{12} = 0$, para mostrar que

$$G = -\int\int_{S_2} \left(d\vec{l}_1 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) \cdot d\vec{a}_2 \ .$$

(C) Use a segunda igualdade de (3.16), (3.37) e novamente o teorema de stokes (1.40) para mostrar finalmente que

$$G = \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \ .$$

(D) Mostre que

$$H \equiv \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} = \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \ .$$

3.7 - O objetivo deste exercício é mostrar que a força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito é a mesma quando calculada pela força de Ampère ou pela de Grassmann.

Após integrar no circuito 2, as equações (3.1) e (3.10) podem ser escritas como

$$d\vec{F}^A_{\mathcal{C}_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 (2\vec{A}_1 - 3\vec{A}_2) \ ,$$

$$d\vec{F}^G_{\mathcal{C}_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 (\vec{A}_1 - \vec{A}_3) \ ,$$

onde

$$\vec{A}_1 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ ,$$

$$\vec{A}_2 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \ ,$$

$$\vec{A}_3 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}^2} \ .$$

(A) Usando (3.16), o fato de que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$, e as relações (3.19) e (3.20) mostre que $\vec{A}_2$ pode ser expressa como (lembre-se que como ∇_1 só atua na variável 1 ele pode sair da integral $\oint_{\mathcal{C}_2}$):

$$\vec{A}_2 = -\nabla_1 \left[\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)\,(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \right] - 2\vec{A}_2 + \vec{A}_3$$

$$+ \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \left[(x_1 - x_2)\nabla_1 dl_{1x} + (y_1 - y_2)\nabla_1 dl_{1y} + (z_1 - z_2)\nabla_1 dl_{1z} \right]$$

$$+ \oint_{\mathcal{C}_2} \left(\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \cdot d\vec{l}_2 \right) d\vec{l}_1 \ .$$

(B) Use o fato de $d\vec{l}_1$ poder sair para fora da última integral, mais o teorema de Stokes e as relações (3.16) e (1.47) para mostrar que a última integral do lado direito da expressão acima é nula.

(C) Use o exercício 3.5 e aplique novamente ∇_1 em G para mostrar que (usando (3.32))

$$\nabla_1 G = -\vec{A}_1 + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} [dl_{2x}\nabla_1 dl_{1x} + dl_{2y}\nabla_1 dl_{1y} + dl_{2z}\nabla_1 dl_{1z}] \ .$$

(D) Jogue os resultados das letras (B) e (C) na letra (A) para mostrar que

$$3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4 \ ,$$

onde

$$\vec{A}_4 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} \left\{ \left[(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\frac{(x_1 - x_2)}{r_{12}} - dl_{2x} \right] \nabla_1 dl_{1x} + \left[(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\frac{(y_1 - y_2)}{r_{12}} \right.\right.$$

$$\left.\left. - dl_{2y} \right] \nabla_1 dl_{1y} + \left[(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\frac{(z_1 - z_2)}{r_{12}} - dl_{2z} \right] \nabla_1 dl_{1z} \right\} \ .$$

(E) Lembrando que tudo que tem a ver apenas com a variável 1 pode sair para fora da integral sobre $\mathcal{C}_2$ vem que a primeira integral de $\vec{A}_4$ pode ser escrita como

$$(\nabla_1 dl_{1x}) \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} [(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)\,(\hat{r}_{12} \cdot \hat{x}) - (d\vec{l}_2 \cdot \hat{x})] \ .$$

Use o teorema de Stokes (1.40) e as relações (3.37), (3.38), (3.16), (3.17) e os fatos de que $\nabla_2 \times \hat{x} = 0$, $\hat{r}_{12} \times \hat{r}_{12} = 0$, $\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot \hat{x}) = [-\hat{x} + (\hat{r}_{12} \cdot \hat{x})\hat{r}_{12}]/r_{12}$; para mostrar que esta integral é nula.

(F) Mostre que as outras duas integrais de $\vec{A}_4$ também são nulas, para concluir que $\vec{A}_4 = 0$.

(G) Jogue o resultado da letra (F) na letra (D) para concluir que são iguais as forças de Ampère e Grassmann de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito. Isto é um resultado de $3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{A}_3$, de tal forma que $2\vec{A}_1 - 3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{A}_3$. Isto significa que

$$d\vec{F}^A_{C_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = d\vec{F}^G_{C_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = I_1 d\vec{l}_1 \times \left(\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) .$$

4) Lei de Indução de Faraday

4.1 - Lei de Faraday

Usualmente se produz corrente elétrica através de uma voltagem ou diferença de potencial estrostática, como quando ligamos os terminais de uma pilha ou bateria por um condutor metálico. Uma outra maneira de gerar corrente elétrica completamente independente da anterior foi descoberta em 1831 por Michael Faraday (1791 - 1867). Este é o assunto deste capítulo.

Faraday nunca teve uma educação formal em ciência e sempre foi um autodidata. Chegou a assistir a algumas palestras públicas do químico e físico inglês Humphry Davy (1778 - 1829) e aos 21 anos passou a ser assistente de Davy no laboratório de química da Royal Institution (Londres). Foi aí que ele trabalhou a vida inteira. A partir da morte de Davy se tornou o diretor do laboratório. Faraday sempre foi essencialmente um químico e físico experimental, e seus conhecimentos matemáticos sempre foram muito restritos. Faraday sempre foi muito influenciado por Davy e durante uns 10 anos se ocupou principalmente de química (eletrólise, decomposição de elementos, etc.) Foi a partir de 1820, em seguida à descoberta fundamental de Oersted, que passou a se dedicar mais ao eletromagnetismo.

A inspiração para suas pesquisas experimentais foi a tentativa de encontrar fenômenos na eletrodinâmica análogos ao que ocorre na eletrostática. Sabia que quando se aproxima uma carga elétrica de um condutor neutro (por exemplo, um metal), a carga induz uma carga oposta no lado do condutor mais próximo da carga (ver figura 4.1):

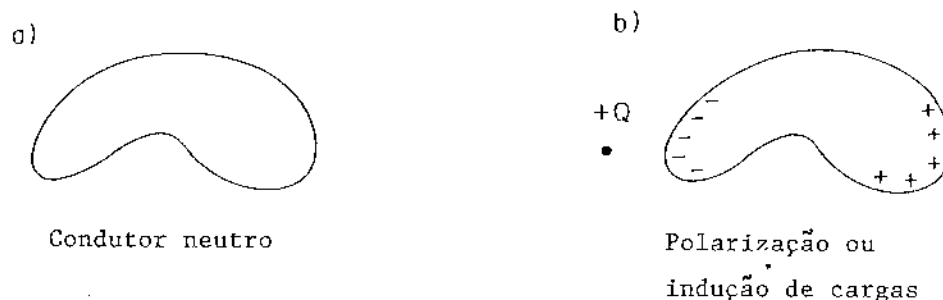



Figura 4.1

Sua idéia inicial foi a de que se mantivesse uma corrente elétrica próxima de um outro fio fechado ou chapa metálica, a primeira corrente poderia induzir uma corrente elétrica nestes corpos vizinhos, e esta corrente induzida permaneceria enquanto houvesse corrente no primeiro circuito. Viu experimentalmente que esta idéia não funcionava mas fez a grande descoberta em 1831 de que uma corrente era induzida no circuito secundário desde que variasse a corrente no circuito primário. Em seguida observou que mesmo que houvesse uma corrente constante no circuito primário, podia induzir uma corrente no secundário desde que houvesse um movimento relativo entre os dois circuitos. Também se a área de um dos circuitos fosse alterada seria gerada uma corrente enquanto estivesse havendo a variação da área. Estes três casos estão representados na figura 4.2.

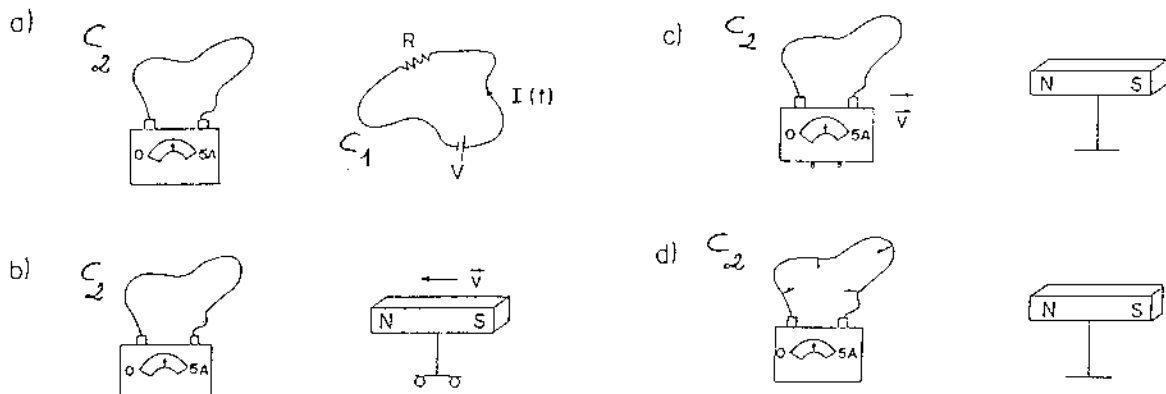



Figura 4.2: Indução de correntes

(A) Variação de intensidade da corrente no circuito primário,

(B) Ímã permanente se aproximando de um circuito,

(C) Circuito se aproximando de um ímã,

(D) Variação da área de um circuito numa região de campo magnético.

Na figura (A) os circuitos estão em planos paralelos. Nas figuras (B) a (D) o eixo norte-sul do ímã é normal ao plano do circuito secundário.

Faraday expressou seus resultados dizendo que a corrente induzida I_2 é devida a uma força eletromotriz induzida, fem_{12}, e esta fem_{12} surge quando há uma variação do fluxo magnético sobre a área do circuito secundário onde está ocorrendo a indução. Lembrar que a fem, embora seja chamada de força, é uma voltagem não eletrostática cuja dimensão é o volt ($1V = 1kgm^2C^{-1}s^{-2}$). Por analogia com a lei de Ohm ($I = V/R$) podemos escrever a lei de Faraday (quando não há baterias ligadas ao circuito) na forma

$$I_2 = \frac{fem_{12}}{R_2} \ , \tag{4.1}$$

$$fem_{12} \equiv -\frac{d}{dt}\Phi_B \ , \tag{4.2}$$

$$\Phi_B \equiv \int_{S_2}\int \vec{B} \cdot d\vec{a}_2 \ . \tag{4.3}$$

Em (4.2) o sinal de menos foi colocado para deixar esta lei compatível com a descoberta de Lenz de 1834, que tem a ver com o sentido da corrente induzida, coisa que Faraday não havia determinado. A lei de Lenz afirma que quando se varia o fluxo magnético sobre um circuito a corrente induzida nele é em direção tal que a força resultante sobre ele tende a se opor à variação do fluxo. Por exemplo, suponhamos que haja uma espira circular de raio r centrada na origem, sobre o plano XY, sem corrente. Caso um ímã permanente localizado sobre o eixo Z, na região $z > 0$, com o pólo norte para baixo e o pólo sul para cima comece a se aproximar da espira, a corrente induzida será na direção anti-horária. Isto é, é como se a espira se transformasse num pequeno ímã com o pólo norte para cima tal que tende a repelir o ímã permanente que está se aproximando dela. Pode-se dizer que a lei de Lenz exprime o fato de no caso da indução de correntes a natureza se comporta de maneira a evitar instabilidades (no exemplo acima caso a corrente induzida fosse no sentido horário haveria uma atração entre o ímã e a espira, o que se configuraria como uma situação instável já que qualquer perturbação na posição do ímã tenderia a crescer indefinidamente).

4.2 - Franz Neuman

Além de Faraday e Lenz, outra pessoa importante na lei de indução é Neumann. Ele foi o primeiro a matematizar a lei de Faraday. O objetivo de Neumann era deduzir a lei de Faraday (4.1) a (4.3) partindo da força de Ampère (3.1). Foi durante suas pesquisas que introduziu o potencial vetor magnético $\vec{A}$ definido por (Neumann, 1845 e 1848 a, b):

$$\vec{A}(\vec{r}_2) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \ . \tag{4.4}$$

Este é o potencial vetor no ponto $\vec{r}_2$ devido ao circuito $\mathcal{C}_1$. Aplicando o rotacional $\nabla_2 \times$ em ambos os lados de (4.4) se obtem (usando (3.37), (3.16) e lembrando que o operador ∇_2 só atua nas variáveis 2 e portanto pode entrar em $\oint_{\mathcal{C}_1}$ e não atua em $I_1 d\vec{l}_1$):

$$\nabla_2 \times \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \times I_1 d\vec{l}_1 \ . \tag{4.5}$$

Mas este é justamente o campo magnético devido ao circuito 1 ((3.35) trocando os índices 1 e 2, e lembrando que $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$), isto é,

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \nabla_2 \times \vec{A} \ , \tag{4.6}$$

com $\vec{A}$ dado por (4.4). Aplicando este resultado em (4.2) e usando o teorema de Stokes (1.40) vem que pode-se escrever a lei de Faraday (4.1) com a fem_{12} dada na forma (ver exercício 4.1):

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt}\mathcal{C}_A = -\frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 = \oint_{\mathcal{C}_2} (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \cdot d\vec{l}_2 \ . \tag{4.7}$$

Isto é, Neumann conseguiu expressar a lei de indução sem precisar falar no campo magnético, e para isto usando apenas seu potencial vetor $\vec{A}$, dado por (4.4).

Neumann também introduziu aquilo que se chama de coeficiente de indutância mútua, M, dado por

$$M \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \ . \tag{4.8}$$

Este coeficiente é independente da intensidade das correntes I_1 e I_2, e portanto é apenas um fator geométrico que relaciona os dois circuitos. Com isto vem que a lei de indução também pode ser expressa na forma (ver exercício 4.2):

$$I_2 = \frac{fem_{12}}{R_2} , \tag{4.9}$$

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt}(I_1 M) . \tag{4.10}$$

Há ainda uma outra maneira de ver a lei de indução. Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas de mesma magnitude mas de sinais opostos separadas pela distância l. O momento de dipolo elétrico é definido por:

$$\vec{p} \equiv q\vec{l} , \tag{4.11}$$

onde q é a carga positiva e $\vec{l}$ é o vetor que aponta da carga negativa para a positiva, e cujo módulo é a distância entre as duas. A energia potencial deste dipolo numa região de campo elétrico $\vec{E}$ (isto é, a energia gasta para trazer este dipolo lentamente do infinito até este ponto sem alterar a distância l, e supondo que $\vec{E}$ não dependa do tempo) é dada por

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} . \tag{4.12}$$

Em analogia com tudo isto vem que se pode definir o momento magnético de uma pequena espira de área a e corrente I como

$$\vec{m} \equiv Ia\hat{u} , \tag{4.13}$$

onde $\hat{u}$ é o vetor unitário perpendicular à área a e apontando de acordo com a regra da mão direita. A energia potencial deste dipolo numa região onde há um campo magnético $\vec{B}$ (isto é, a energia gasta para trazer este dipolo lentamente do infinito até esta região supondo que $\vec{B}$ não depende do tempo e que I e a permanecem constantes) é dada por

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} . \tag{4.14}$$

No caso de um circuito macroscópico $\mathcal{C}_1$ na presença de um campo magnético $\vec{B}$ vem ao se generalizar o resultado anterior que sua energia potencial é dada por

$$W = -I_1 \int\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{a}_1 = -I_1 I_2 M \ . \tag{4.15}$$

Isto leva a que a força eletromotriz induzida seja dada por

$$fem_{12} = \frac{d}{dt}\left(\frac{W}{I_2}\right) \ . \tag{4.16}$$

Em (4.15) W pode ser visto como o trabalho que tem de ser feito contra a força entre os dois circuitos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ para separá-los a uma distância infinita, supondo que as intensidades das correntes permaneçam constantes.

Antes de prosseguir vale lembrar que de acordo com a lei de Ohm vem que a fem é uma voltagem e portanto é igual a $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Usando este resultado em (4.2) e (4.3) vem:

$$fem_{12} = \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 = \int\int_{S_2} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{a}_2 \ . \tag{4.17}$$

Do teorema de Stokes (1.40) vem então

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \tag{4.18}$$

que é a lei de Faraday na forma diferencial (1.44). Comparando ainda (4.17) com (4.7) vê-se que a componente do campo elétrico responsável pela lei de indução não é a componente de Poisson, mas sim $-\partial \vec{A}/\partial t$ (ver exercício 1.8).

4.3 - Derivação da Lei de Faraday a partir da Força de Weber

Agora que já detalhamos alguns aspectos da lei de indução, vamos deduzi-la partindo da lei de Weber. Há vários procedimentos para isto, cada um deles com suas peculiaridades e características próprias, e como exemplo citamos: (Whittaker, 1973, Vol. 1, Cap. 7), (O'Rahilly, 1965, Vol. 2, Cap. 11), (Wesley, 1987 b; 1990 a, b; e 1991, Cap. 6), (Maxwell, 1954, Vol. 2, Cap. 23). Vamos seguir mais de perto o procedimento de Maxwell nesta dedução.

Inicialmente citamos as palavras de Maxwell:

"Após deduzir da fórmula de Ampère para a ação [força] entre elementos de corrente, sua própria fórmula para a ação [força] entre partículas elétricas que se movem, Weber procedeu para aplicar sua fórmula à explicação da produção de correntes elétricas por indução eletromagnética. Nisto ele foi eminentemente bem sucedido, e indicaremos o método pelo qual as leis de indução de correntes podem ser deduzidas da fórmula de Weber." (Maxwell, 1954, artigo 856, pág. 486).

Queremos então calcular a força eletromotriz induzida sobre o circuito 2 devido à corrente no circuito primário nas duas situações estudadas por Faraday: Quando o circuito 1 translada como um todo, se aproximando ou se afastando do circuito 2; e quando a corrente no primário varia no tempo, $I_1(t)$. Apresentamos novamente a força de Weber exercida por dq_2 sobre dq_1, (2.4):

$$d^2\vec{F}_{21} = \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}_{12}\cdot\vec{v}_{12} - \frac{3}{2}(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12}\cdot\vec{a}_{12}\right)\right] . \qquad (4.19)$$

A força eletromotriz, fem, é uma voltagem que gera uma corrente. Podemos pensar numa voltagem como sendo devida a um campo elétrico. No caso de cargas livres no espaço sabemos que as positivas vão do maior para o menor potencial, isto é, na mesma direção em que aponta o campo elétrico, enquanto que as negativas seguem em sentido contrário. Caso isto ocorra então ambas contribuem com o aumento da corrente. No caso da corrente induzida só nos interessa a componente da corrente paralela ao fio em cada ponto, isto

é, a $d\vec{l}_2$. Juntando tudo isto e lembrando que estamos considerando cada elemento de corrente como sendo neutro eletricamente, vem que a fem$_{12}$ em $d\vec{l}_2$ devido a $d\vec{l}_1$ é dada por (Maxwell, 1954, Vol. 2, Cap. 23):

$$d^2 fem_{12} \equiv \left[\frac{(d\vec{F}_{1+,\ 2+} + d\vec{F}_{1-,\ 2+}) - (d\vec{F}_{1+,\ 2-} + d\vec{F}_{1-,\ 2-})}{2dq_{2+}}\right] \cdot d\vec{l}_2 \ . \tag{4.20}$$

Dividimos as forças por dq_{2+} para obter algo como um campo elétrico generalizado, e o fator 2 vem pelo fato de estarmos considerando nas forças as contribuições das cargas positivas (dq_{2+}) e negativas (dq_{2-}) simultaneamente.

Como já afirmamos, queremos estudar não só o caso em que a intensidade da corrente no primário varia no tempo, mas também quando o circuito primário translada como um todo. As velocidades das cargas positivas e negativas em cada elemento são então dadas por

$$\vec{v}_{1+} \equiv \frac{d\vec{r}_{1+}}{dt} = \vec{v}_{1+d} + \vec{V} \ , \tag{4.21}$$

$$\vec{v}_{1-} \equiv \frac{d\vec{r}_{1-}}{dt} = \vec{v}_{1-d} + \vec{V} \ , \tag{4.22}$$

$$\vec{v}_{2+} \equiv \frac{d\vec{r}_{2+}}{dt} = \vec{v}_{1+d} \ , \tag{4.23}$$

$$\vec{v}_{2-} \equiv \frac{d\vec{r}_{2-}}{dt} = \vec{v}_{2-d} \ . \tag{4.24}$$

Nestas expressões $\vec{V}$ é a velocidade de translação do circuito 1 como um todo relativo ao circuito 2 (como medido num sistema de referência inercial), e o sub-índice d significa a velocidade da carga em relação ao fio, isto é, a velocidade de "drifting" ou de migração, ou seja, a velocidade responsável pela corrente elétrica.

Além disto vamos assumir a hipótese de Fechner, isto é, $\vec{v}_{1-d} = -\vec{v}_{1+d}$ e $\vec{v}_{2-d} = -\vec{v}_{2+d}$. Esta hipótese era comum no século passado e foi usada tanto por Weber quanto por Maxwell (lembrar que o elétron só foi descoberto em 1897). Neste livro não vamos tratar do caso

mais geral e mais frequente em que as velocidades $\vec{v}_{1+d}$ e $\vec{v}_{1-d}$, assim como $\vec{v}_{2+d}$ e $\vec{v}_{2-d}$, têm módulos diferentes, apesar de não impormos nenhuma relação entre $\vec{v}_{1+d}$ e $\vec{v}_{2+d}$.

Assumindo então a hipótese de Fechner e as relações (4.21) a (4.24) em (4.20) vem (ver exercício 4.3):

$$d^2fem_{12} = -\frac{dq_{1+}}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^2c^2}\Big\{2\vec{V}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})-3(\hat{r}_{12}\cdot\vec{V})[\hat{r}_{12}\cdot(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})]$$

$$+\,\vec{r}_{12}\cdot(\vec{a}_{1+}-\vec{a}_{1-})\Big\}\ . \qquad (4.25)$$

Seguindo Maxwell mais uma vez, vamos considerar todas as grandezas do sistema, como r_{12} por exemplo, como funções de apenas três variáveis independentes: l_1, l_2 e t. Isto é, l_1 é um comprimento medido sobre o circuito 1 a partir de uma certa origem arbitrária pré-estabelecida, com sentido positivo ao longo da direção da corrente, o mesmo ocorrendo com l_2 em relação ao circuito 2, e t é o tempo. Este procedimento é claramente correto e leva a que, por exemplo, $r_{12}=r_{12}(l_1,\,l_2,\,t)$ e $dr_{12}=dl_1(\partial r_{12}/\partial l_1)+dl_2(\partial r_{12}/\partial l_2)+dt(\partial r_{12}/\partial t)$.

De (3.3) vem, com $dq_{1+}=\lambda_{1+}dl_1$:

$$I_1d\vec{l}_1 = dq_{1+}(\vec{v}_{1+}-\vec{v}_{1-}) = dq_{1+}(\vec{v}_{1+d}-\vec{v}_{1-d})\ . \qquad (4.26)$$

Em geral quando se varia a intensidade da corrente num fio metálico o que muda é a velocidade de migração das cargas, mas não o número ou densidade de portadores (elétrons livres). Isto em (4.26) leva a que (ver exercício 4.4):

$$dq_{1+}(\vec{a}_{1+}-\vec{a}_{1-}) = \frac{\partial I_1}{\partial t}d\vec{l}_1\ . \qquad (4.27)$$

Jogando (4.26) e (4.27) em (4.25) obtem-se, usando que $c^2=(\mu_o\varepsilon_o)^{-1}$, e integrando sobre os dois circuitos:

$$fem_{12} = \frac{-\mu_o}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2}\Big[2I_1(\vec{V}\cdot d\vec{l}_1)-3I_1(\hat{r}_{12}\cdot\vec{V})(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)$$

$$+\,r_{12}\frac{\partial I_1}{\partial t}(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)\Big]\ . \qquad (4.28)$$

Usando a regra da cadeia no último termo vem que

$$fem_{12} = \frac{-\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left\{ 2I_1 \frac{(\vec{V} \cdot d\vec{l_2})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}^2} - 3I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}^2} \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}} \right] - I_1 \frac{(\hat{r} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})$$

$$\left. -I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2}) + I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}^2} \frac{\partial r_{12}}{\partial t} \right\} . \tag{4.29}$$

Usando que ((4.32) e (4.33) seguem do fato de os circuitos não girarem, apenas transladarem, enquanto que (4.30) e (4.31) são derivadas no exercício 4.5):

$$\frac{\partial \vec{r}_{12}}{\partial t} = \vec{V} , \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial t} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{V} , \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial d\vec{l_1}}{\partial t} = 0 , \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial d\vec{l_2}}{\partial t} = 0 , \tag{4.33}$$

pode-se mostrar que (ver exercício 4.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1}) = \frac{\vec{V} \cdot d\vec{l_1}}{r_{12}} - \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})}{r_{12}} , \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2}) = \frac{\vec{V} \cdot d\vec{l_2}}{r_{12}} - \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}} . \tag{4.35}$$

Com estes valores em (4.29) se obtem

$$fem_{12} = \frac{-\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_1})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}} \right] + I_1 \frac{(\vec{V} \cdot d\vec{l_1})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l_2})}{r_{12}^2} \right.$$

$$-I_1\frac{(\vec{V}\cdot d\vec{l}_2)(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)}{r_{12}^2}\bigg\} \ . \qquad (4.36)$$

Lembrando que $I_1(\vec{V}\cdot d\vec{l}_1)$ pode sair para fora da integral em $\mathcal{C}_2$ pode-se mostrar que a segunda integral é nula (ver exercício 3.7, letra (B)). Da mesma maneira pode-se mostrar que a terceira integral é nula fazendo-se primeiro a integral em $\mathcal{C}_1$. De tal forma ficamos com

$$fem_{12}=\frac{-\mu_o}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[I_1\oint_{\mathcal{C}_1}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}}\right] \ . \qquad (4.37)$$

Do exercício 3.6 e da definição (4.8) vem finalmente que a partir da força de Weber se chega na relação

$$fem_{12}=-\frac{d}{dt}(I_1M) \ , \qquad (4.38)$$

que é exatamente uma das maneiras de se expressar a lei de Faraday, como vimos em (4.10).

Também pode-se chegar num outro resultado interessante relacionado com a energia potencial e com a indução a partir da energia potencial generalizada de Weber (2.9). Como vimos no capítulo 3, a energia potencial de dois elementos de corrente $I_1d\vec{l}_1$ e $I_2d\vec{l}_2$ de acordo com (2.9) é dada por (ver exercício 3.2):

$$d^2U=\frac{\mu_o}{4\pi}I_1I_2\frac{(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \ . \qquad (4.39)$$

Usando o exercício 3.6 e a definição 4.8 vem que a energia potencial total da interação entre dois circuitos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ é dada por, de acordo com Weber:

$$U=I_1I_2M \ . \qquad (4.40)$$

E então é fácil ver que também a partir da energia potencial de Weber se pode chegar na lei de indução.

Sugerimos fortemente a leitura dos livros de O'Rahilly, Maxwell e Whittaker nas páginas indicadas anteriormente para que seja feito um aprofundamento histórico e crítico da lei de indução.

4.4 - Exercícios

4.1 - Lei de indução.

(A) Seja $\vec{A}$ definido por (4.4). Aplique o rotacional $\nabla_2\times$ em ambos os lados desta equação para encontrar que $\vec{B}(\vec{r}_2) = \nabla_2 \times \vec{A}$, onde $\vec{B}(\vec{r}_2)$ é dado por (3.35) trocando-se os índices 1 e 2.

(B) Use este resultado e o teorema de Stokes para mostrar que

$$C_A = \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 = \int\int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2 = \Phi_B \ .$$

(C) Conclua então que no caso em que não há baterias ligadas ao circuito, a lei de indução de Faraday pode ser expressa como

$$R_2 I_2 = -\frac{d}{dt}\left[\int\int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2\right] = -\frac{d}{dt}\left[\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2\right] \ .$$

4.2 - Coeficiente de indutância mútua.

(A) Seja M definido por (4.8). Use os resultados do exercício anterior para mostrar que

$$\Phi_{B \text{ através de } \mathcal{C}_2} = I_1 M \ .$$

(B) Comece tudo novamente para mostrar que

$$\Phi_{B \text{ através de } \mathcal{C}_1} = I_2 M \ .$$

(C) Use o resultado da letra (A) para colocar a lei de indução na forma (4.10).

4.3 - Use (4.19) e (4.24), juntamente com a hipótese de Fechner $\vec{v}_{i-} = -\vec{v}_{i+}$, para chegar em (4.25). Observe que mais uma vez o termo Coulombiano na força de Weber não vai influenciar em nada na lei de indução (ver também exercício 1.8).

4.4 - Aqui vamos derivar (4.27) a partir de (4.26).

(A) Mostre que de (3.3) e (3.4) vem, lembrando que as velocidades das cargas são paralelas aos fios:

$$I_i = \lambda_{i+}(v_{i+} - v_{i-}) \; ; \quad i = 1, \; 2 \; .$$

(B) Como a variação da corrente em fios metálicos muda apenas a velocidade de migração das cargas mas não suas densidades vem

$$\lambda_{i+}(a_{i+} - a_{i-}) = \frac{dI_1}{dt} = \frac{\partial I_1}{\partial t} \; ,$$

com o qual se chega em (4.27).

(C) Outra maneira é considerando as variáveis como função da posição no fio e do tempo.

Mostre então de (4.26) que, supondo a constância das cargas:

$$dq_{1+}(\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) = \frac{d}{dt}(I_1 d\vec{l}_1) = \frac{dI_1}{dt} d\vec{l}_1 + I_1 \frac{d(d\vec{l}_1)}{dt} \; .$$

(D) Como a corrente é constante ao longo de todo o fio, vem que $\partial I_1/\partial l_1 = 0$, e portanto $dI_1/dt = \partial I_1/\partial t$. Por outro lado temos que naturalmente $\partial \vec{l}_1/\partial l_1 = 0$, embora como vimos no capítulo 3 não necessariamente temos $\partial \vec{l}_1/\partial x_1 = 0$. Como a situação que está sendo estudada é apenas a de translação do circuito, sem rotação, vem que $\partial(d\vec{l}_1)/\partial t = 0$. Junte tudo isto para chegar então em (4.27).

4.5 - (A) Prove (4.30) usando que $\vec{r}_{12}$ é função de $l_1, \; l_2$ e t.

(B) Prove (4.31) usando que r_{12} é função de $l_1, \; l_2$ e t.

(C) Prove (4.31) usando a letra (A) e o fato de que $r_{12} = (\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12})^{1/2}$.

4.6 - Prove (4.34) a (4.35) usando (4.30) a (4.33) e a regra da cadeia para a derivada de um produto escalar.

4.7 - Refaça toda a seção 4.3, de (4.19) até chegar em (4.38).

5) Forças de Weber e de Lorentz

5.1 - Introdução

Como vimos nos capítulos anteriores, a lei de Weber segue todos os princípios de conservação da física clássica: momento linear, momento angular e energia. Com ela se deriva também a força de Ampère entre elementos de corrente. Por último vimos que também se derivam a partir dela o conjunto das equações de Maxwell (lei de Gauss, lei circuital de Ampère, lei da ausência de monopólos magnéticos, e lei de indução de Faraday). No caso particular da lei circuital de Ampère foi necessário, além da força de Weber, introduzir a equação de conservação de cargas para se obter a corrente de deslocamento de Maxwell. O inverso foi mostrado no exercício 1.2, isto é, a partir das leis de Gauss e Ampère, com corrente de deslocamento, pode-se derivar a equação de conservação de cargas. O importante a ser enfatizado aqui é que a força de Weber é completamente compatível com as equações de Maxwell.

Disto vem que a única diferença da eletrodinâmica de Weber em relação ao eletromagnetismo clássico é na força que atua sobre as cargas. Lembramos que isto não é fornecido pelas equações de Maxwell, que dão apenas os campos gerados pelas cargas mas não dão como as cargas sentem ou reagem à presença de campos externos. No caso do eletromagnetismo clássico isto é dado pela força de Lorentz, enquanto que na eletrodinâmica de Weber temos a própria força de Weber.

Neste capítulo vamos comparar estas duas forças.

5.2 - Potenciais de Lienard-Wiechert

A maneira mais direta de comparar as duas expressões de força é obtida com o auxílio dos potenciais de Lienard-Wiechert. Antes um pouco do contexto histórico. A idéia de que a interação entre os corpos não é instantânea mas leva tempo para se propagar de um corpo ao outro é antiga. Mas no caso do eletromagnetismo o primeiro a expressá-la claramente parece ter sido Gauss em 1845 numa carta endereçada a Weber (Whittaker, 1973, Vol. 1, pág. 240; Maxwell, 1954, Vol. 2, artigo 861, pág. 489; O'Rahilly, 1965, Vol. 1, pág. 226). Em 1858 Riemann (1826 - 1866), estudante, amigo e auxiliar de Weber e Gauss na universidade de Gottingen, introduziu a idéia do tempo retardado na física. Esta consiste em dizer que a força sentida por uma carga q_1 localizada em $\vec{r}_1$ no tempo t devido a uma outra carga q_2, depende da posição, velocidade e aceleração de q_2 no instante retardado $t - r_{12}/c$. Nesta expressão r_{12} é a distância entre as duas cargas e c é a velocidade com que viaja a interação, que se assume como sendo a velocidade da luz. O trabalho de Riemann só foi publicado em 1867 (Riemann, 1867 e 1977), no mesmo ano em que Ludwig Lorenz (1829 - 1891), um físico dinamarquês (não confundir com o H. A. Lorentz da força de Lorentz), publicou um trabalho de certa forma equivalente onde desenvolveu independentemente a idéia do tempo retardado (Lorenz, 1867). Pode-se então dizer que Riemann e Lorenz são, com justiça, os introdutores do tempo retardado na física.

Em 1867 o físico alemão Clausius (1822 - 1888) obteve uma lei de força análoga à que Lorentz introduziria vinte anos depois, e mostrou que com ela se podia derivar a força de Grassmann (ver Clausius, 1880). Lorentz introduziu sua lei de força entre 1892 e 1895, e sua diferença em relação a Clausius é que na expressão da força já incluía o tempo retardado. Em 1898 A. Lienard deu um grande avanço em relação ao trabalho de Lorentz ao trabalhar com os potenciais retardados devido a cargas discretas (Lienard, 1898 a, b, c). Este trabalho foi seguido em 1900 por um outro na mesma linha escrito por E. Wiechert (Wiechert, 1900). Por este motivo os potenciais que vamos apresentar recebem usualmente o nome de potenciais de Lienard-Wiechert. Deve-se ainda lembrar que K. Schwarzschild apresentou avanços importantes nesta mesma direção (cálculo do potencial eletrodinâmico, etc.) em 1903 (Schwarzschild, 1903 a, b, c).

Após este preâmbulo apresentamos as fórmulas correspondentes. A força de Lorentz (1.32) expressa em termos dos potenciais ϕ e $\vec{A}$ através de (1.31) e (1.26) fica na forma, no caso da força de q_2 em q_1:

$$\vec{F}_{21} = -q_1\left(\nabla_1\phi_2 + \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t}\right) + q_1\vec{v}_1 \times (\nabla_1 \times \vec{A}_2) \ . \tag{5.1}$$

Nesta expressão ∇_1 e $\nabla_1 \times$ são para ser obtidos no ponto onde está a carga 1, enquanto que ϕ_2 e $\vec{A}_2$ são os potenciais gerados pela carga q_2.

Os potenciais de Lienard-Wiechert são os análogos de (3.49) e (4.4), invertendo os índices 1 e 2, e substituindo $Id\vec{l}$ por $\rho\vec{v}dV$, isto é

$$\phi_2(\vec{r}_1, t) \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\int\int \frac{\rho_2(\vec{r_2}^*, t^*)}{r_{12}} dV_2^* \ , \tag{5.2}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}_1, t) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi}\int\int\int \frac{\rho_2(\vec{r_2}^*, t^*)\vec{v}_2(t^*)}{r_{12}} dV_2^* \ . \tag{5.3}$$

Nestas expressões o grande avanço é que agora os potenciais no ponto $\vec{r}_1$ no tempo t são obtidos em função de onde q_2 estava no tempo retardado $t^* = t - r_{12}/c$. As grandezas com asterisco são para ser entendidas como sendo obtidas no tempo retardado, isto é, $\vec{r_2}^* \equiv \vec{r}_2(t^*)$, etc.

Através dos trabalhos de Lienard, Wiechert e Schwarzschild pode-se obter diretamente a força entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 destas expressões (isto não é simplesmente substituir $\rho_2 dV_2$ por q_2, ver Whittaker, págs. 407 a 409). O caminho para a obtenção do resultado final é bem complicado e está além dos objetivos deste livro (para os interessados sugerimos O'Rahilly, 1965, Vol. 1, Cap. 7). O que nos interessa aqui é apenas o resultado final, que é obtido fazendo-se uma expansão em série de Taylor de todas as expressões que contenham t^* em torno de $t^* = t$. Fazendo isto e indo até termos em segunda ordem em $1/c$ obtem-se (ver O'Rahilly, 1965, Vol. 1, pág. 220), de (5.1) a (5.3):

$$\vec{F}_{21} = q_1\vec{E_2}^* + q_1\vec{v}_1 \times \vec{B_2}^* \simeq q_1\left\{\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}^2}\left[\hat{r}_{12}\left(1 + \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2c^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{3}{2}\frac{(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_2)^2}{c^2} - \frac{\vec{r}_{12}\cdot\vec{a}_2}{2c^2}\right) - \frac{r_{12}\vec{a}_2}{2c^2}\right]\right\} + \ q_1\vec{v}_1 \times \left\{\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}^2}\frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12}}{c^2}\right\} \ . \tag{5.4}$$

Um fato extremamente importante a ser enfatizado é que apenas $\vec{E}_2{}^*$ e $\vec{B}_2{}^*$ em (5.4) são calculados no tempo retardado, já que **do lado direito da última igualdade todas as grandezas (inclusive r_{12}, $\hat{r}_{12}$, $\vec{v}_2$ e $\vec{a}_2$) estão sendo calculadas e medidas no tempo t e não no tempo retardado t^*** (lembrar que já foi feita a expansão de Taylor em torno de $t^* = t$ para se chegar aí). Embora a expressão geral da força tenha termos de infinitas ordens nas potências de $1/c$, pegamos apenas até os termos de segunda ordem já que praticamente todos os fenômenos estudados do eletromagnetismo (como a força de Coulomb, a lei circuital de Ampère, o campo magnético de Biot-Savart e a lei de indução de Faraday) já surgem com precisão suficiente nesta aproximação.

Trocando os índices 1 e 2, e lembrando que $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ vem:

$$\vec{F}_{12} = q_2\vec{E}_1{}^* + q_2\vec{v}_2 \times \vec{B}_1{}^* \simeq q_2\left\{\frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}^2}\left[\hat{r}_{12}\left(1 + \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}{2c^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{3}{2}\frac{(\hat{r}_{12}\cdot\vec{v}_1)^2}{c^2} + \frac{\vec{r}_{12}\cdot\vec{a}_1}{2c^2}\right) + \frac{r_{12}\vec{a}_1}{2c^2}\right]\right\} + q_2\vec{v}_2 \times \left\{\frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}^2}\frac{\vec{v}_1\times\hat{r}_{12}}{c^2}\right\} . \quad (5.5)$$

São estas as expressões fundamentais que vamos comparar com a força de Weber. As equações (5.4) e (5.5) são as leis de força básicas do eletromagnetismo clássico.

No exercício 5.1 indicamos como que se chega no campo magnético de Biot-Savart e à força de Grassmann entre elementos de corrente a partir de (5.4) e (5.5). E como já vimos no capítulo 3, a partir daí se pode chegar em duas das equações de Maxwell (a de ausência de monopólos magnéticos e à lei circuital de Ampère). No caso em que as cargas estão em repouso ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$ e $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = 0$), se obtem de (5.4) e (5.5) a força de Coulomb. E como vimos no capítulo 1 toda a eletrostática e a lei de Gauss (primeira das equações de Maxwell) estão embutidas aí. A lei de indução de Faraday também sai de (5.4) e (5.5) seguindo-se um procedimento no geral equivalente ao que foi feito com a lei de Weber no capítulo 4 (ver ainda O'Rahilly, 1965, Vol. 2, págs. 572 a 581).

Isto mostra que as equações de Maxwell são compatíveis não apenas com a força de Weber (como vimos nos capítulos 2 a 4) mas também com (5.4) e (5.5). Isto significa que as forças de Weber e de Lorentz não podem ser distinguidas desta maneira. Mas nas seções seguintes mostraremos procedimentos diversos para compará-las e distingui-las.

5.3 - Comparação entre as Forças de Weber e de Lorentz

A força de Weber é dada por (2.1) ou (2.4), isto é:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{2}(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}\right)\right] = -\vec{F}_{12} \quad . \tag{5.6}$$

O primeiro aspecto a ser observado na comparação entre as duas leis é que a força de Weber sempre satisfaz ao princípio de ação e reação na forma forte, enquanto que a força de Lorentz não satisfaz a este princípio nem mesmo na forma fraca, a não ser em alguns casos bem específicos. Isto pode ser visto somando (5.4) e (5.5), e observando que os termos restantes não vão necessariamente se cancelar.

A parte Coulombiana é a mesma em Weber e em Lorentz. Vamos agora analisar as componentes que dependem das velocidades e acelerações. Vamos nos concentrar em $\vec{F}_{21}$ e chamaremos de fonte a q_2 e a tudo aquilo que tiver o índice 2 em (5.4) e na primeira igualdade de (5.6). Chamaremos de carga de teste ou carga de prova (isto é, a carga que sente a força) a q_1 e a tudo aquilo que tiver o índice 1 em (5.4) e na primeira igualdade de (5.6).

Em termos das fontes observa-se que a força de Lorentz tem termos dependentes linearmente da velocidade, $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12})$, (isto vem das cargas que geram o campo magnético de Biot-Savart e a força de Grassmann), e termos que dependem do quadrado da velocidade, isto é, $[\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2/2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2/2]\hat{r}_{12}$. Tem ainda termos que dependem da aceleração, isto é, $-[(\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2)\hat{r}_{12} + r_{12}\vec{a}_2]/2$. São estes os termos que vão dar a indução de Faraday em dI_2/dt. A força de Weber também tem termos com este comportamento geral, embora com peculiaridades próprias. Os termos proporcionais à velocidade da fonte são $[-2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)]\hat{r}_{12}$, que como já vimos são os termos que serão responsáveis pelo campo magnético e pela força de Ampère entre elementos de corrente. Os termos proporcionais ao quadrado da velocidade da fonte são $[\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2/2]\hat{r}_{12}$. Já o termo proporcional à aceleração da fonte é $-(\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2)\hat{r}_{12}$. Como já vimos é este o termo

responsável pela indução de Faraday em dI_2/dt.

Embora as duas leis não sejam exatamente iguais nestes aspectos, o comportamento geral é parecido e em geral elas vão dar os mesmos resultados, em particular quando se tem circuitos fechados. Uma exceção a este fato é nos termos proporcionais ao quadrado da velocidade das fontes, e discutiremos um caso particular disto na seção 5.5.

Em termos das cargas de prova, as que sentem a força, observa-se que Lorentz tem termos proporcionais a $\vec{v}_1$ dados por $-\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12})$. Como já vimos, os termos proporcionais a $\vec{v}_1$ em Weber são $[-2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)]\hat{r}_{12}$. Na situação geral de circuitos fechados estes termos vão ser equivalentes. Por outro lado Weber tem termos proporcionais ao quadrado da velocidade da carga de prova dados por $[\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - (3/2)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2]\hat{r}_{12}$. A possível relevância destes termos (não há semelhante na força de Lorentz) é discutida na seção 5.6.

Uma distinção fundamental que ocorre entre as forças de Weber e de Lorentz é que enquanto a força de Weber depende da aceleração da carga de prova na forma $(\hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_1)\hat{r}_{12}$. Recentemente aplicamos uma força de Weber à gravitação e mostramos a importância deste termo de Weber (Assis 1989 a). Em particular indicamos como que com ele se pode derivar uma lei equivalente à segunda lei de Newton e a precessão do periélio dos planetas. Também conseguimos *derivar* neste modelo, sem ser necessário postular isto inicialmente, a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais. Com isto foi possível implementar quantitativamente neste modelo o princípio de Mach, proposto pelo filósofo e físico experimental austríaco Ernst Mach (1838 - 1916) em 1883 (Mach, 1989). Para uma análise do princípio de Mach ver: (Yourgrau e van der Merwe, 1968; Schiff, 1964; Reinhardt, 1973; Phipps, 1978; Raine, 1981; Barbour e Bertotti, 1977; Barbour, 1989; Jaakkola 1987 e 1991; Roscoe 1991 a, b, c). A base deste princípio é a afirmação de que as forças "fictícias" (força centrífuga, de Coriolis, etc.) são de fato reais e têm origem gravitacional na interação de qualquer corpo com o restante do universo. O modelo que apresentamos é preliminar e limitado (por exemplo, se baseia na ação à distância), mas pelo menos tenta trazer elementos novos na discussão do princípio de Mach. Neste livro não trataremos da lei de Weber aplicada à gravitação já que nosso objetivo principal é a eletrodinâmica de Weber. De qualquer forma nos parece relevante chamar a atenção para

estes novos caminhos e suas linhas de pesquisa. Para uma aplicação de forças do tipo da de Weber e similares à gravitação ver: (Assis 1989 a; Eby 1977; Edwards 1974; Ghosh 1991; Sokol'skii e Sadovnikov, 1987; Treder 1972; Treder, von Borzeszkowski, van der Merwe e Yourgrau, 1980; Sciama 1953; Wesley 1990 b e 1991, Capítulo 6; Brown 1955 e 1982).

Uma outra maneira de analisar a força de Weber é olhando para sua forma (2.1). Lá vemos que a força é uma soma de três termos. O primeiro é a força Coulombiana usual, responsável pela eletrostática e pela lei de Gauss. O segundo é o que dá os efeitos magnéticos da lei de Ampère. E o terceiro dado por $q_i q_j \ddot{r}_{ij} \hat{r}_{ij}/(4\pi\varepsilon_o c^2 r_{ij})$ é o responsável pela lei de indução de Faraday e pelos efeitos de inécia quando aplicados à gravitação. É este termo também um dos que dá os efeitos de radiação eletromagnética a partir da lei de Weber (lembrar que a intensidade da radiação de dipolo, ou de uma antena, cai com $1/r$ a grandes distâncias).

Há um outro aspecto que pode ser visto claramente pela força de Weber ou pela de Lorentz. Este se refere às ordens de grandeza entre as forças elétricas, magnéticas e os fenômenos de indução. De (5.4) a (5.6) vê-se que todos os termos, exceto o de Coulomb, têm c^2 no denominador. Já no numerador apresentam termos da ordem v_1^2, $v_1 v_2$, v_2^2, $r_{12}a_1$ e $r_{12}a_2$. Mas são exatamente estes termos os responsáveis pelo campo magnético, pela força de Ampère, e pelos efeitos de indução. Logo para velocidades e acelerações baixas como as que existem usualmente (corrente de algumas dezenas de Ampères, campos magnéticos da ordem de alguns Gauss, etc.), os efeitos magnéticos e de indução de corrente são de segunda ordem em relação aos efeitos eletrostáticos. Isto é, se dois sistemas estão interagindo entre si e há uma carga elétrica líquida (isto é, não nula) nos dois sistemas então usualmente a força Coulombiana suplanta os efeitos magnéticos e indutivos, e embora estes efeitos existam eles ficam mascarados. Para que estes efeitos apareçam com clareza é em geral necessário que nos sistemas não haja carga líquida, ou que esta seja extremamente pequena. Neste caso quase não haverá força Coulombiana e os efeitos magnéticos e indutivos aparecerão como os fenômenos principais. Exemplos deste último caso é quando um ímã permanente (neutro eletricamente, gera $\vec{B}$ mas não $\vec{E}$) interage com uma corrente elétrica num fio ou com outro ímã, ou quando dois fios com corrente interagem entre si.

Nas próximas seções deste capítulo discutiremos em maiores detalhes as distinções

entre as forças de Weber e de Lorentz.

5.4 - Duas Cargas em Movimento Retilíneo Uniforme

Para perceber a diferença de enfoque ao tratarmos de um problema pela força de Lorentz ou de Weber vamos discutir aqui casos simples da força entre duas cargas. O problema completo e geral (incluindo acelerações) de duas cargas interagindo entre si pela força de Weber (problema de dois corpos) está desenvolvido em (Clemente e Assis, 1991) e (Assis e Clemente, 1992). Nestes artigos estudamos o "espalhamento de Rutherford" com um potencial de Weber, as órbitas elípticas que precessam, a velocidade limite obtida com a eletrodinâmica de Weber, etc. Não entraremos nestes aspectos neste livro. Nesta seção nos limitaremos a casos simples que não envolvem a aceleração.

(A) Cargas em repouso.

No primeiro caso temos duas cargas q_1 e q_2 separadas pela distância $\vec{r}_{12} = r_{12}\hat{y}$ e que estão paradas no referencial do laboratório (que vamos considerar como um referencial inercial). Para isto podemos supor que a força Coulombiana é contrabalançada por alguma outra força como, por exemplo, por uma força elástica (supondo as duas cargas ligadas por uma mola). Neste caso como não há nenhum movimento das cargas vem que as forças de Lorentz e de Weber ficam com a mesma forma, isto é, como uma força Coulombiana (ver figura 5.1):

$$\vec{F}_{21}^L = \vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^L = -\vec{F}_{12}^W \quad . \tag{5.7}$$

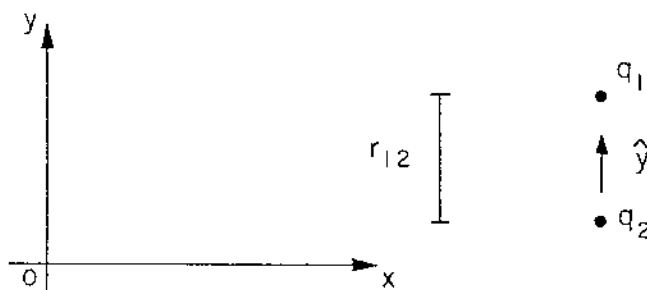



Figura 5.1

(B) Cargas em movimento retilíneo uniforme paralelo.

Vamos supor agora a mesma situação vista por um observador O' que se move em relação ao laboratório com uma velocidade constante $-V\hat{x}$, onde supomos $V << c$. O que este observador vê está representado na figura 5.2.

Naturalmente temos $q_1' = q_1$, $q_2' = q_2$, $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$ e $r_{12}' = r_{12}$. Como estamos supondo uma velocidade constante vem que $\vec{a}\,'_1 = \vec{a}\,'_2 = O$. De (5.6) vem então (vamos representar pelo índice $'$ as forças vistas pelo observador O')

$$\vec{F}_{21}^{W'} = \vec{F}_{21}^{W} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^{W'} \quad . \tag{5.8}$$

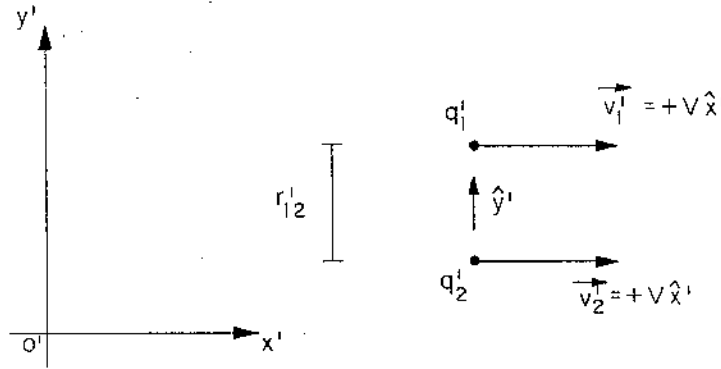



Figura 5.2

Para a lei de Weber não há então diferença em estarmos no referencial do laboratório ou no referencial O' já que não há movimento relativo entre as cargas nos dois casos. Isto ilustra mais uma vez o caráter relacional da força de Weber, já que esta tem sempre o mesmo valor em qualquer referencial.

Como estamos supondo $V^2 << c^2$ podemos usar (5.4) e (5.5) como expressões corretas da força de Lorentz válidas até segunda ordem em $1/c$. De (5.4) e (5.5) vem então que

$$\vec{F}_{21}^{L'} = -\vec{F}_{12}^{L'} = q_1 \left[\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o} \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \right]$$

$$+ q_1 V\hat{x} \times \left[\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{V\hat{z}}{c^2 r_{12}^2} \right] = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} \right) \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \quad . \tag{5.9}$$

Várias coisas se observam desta equação. A primeira é que a força de Lorentz continua satisfazendo o princípio de ação e reação neste caso no referencial O'. No primeiro colchete de (5.9) temos o campo elétrico de q_2 no referencial O', que é maior pelo fator $(1+V^2/2c^2)$ do que o campo elétrico visto em O. No segundo colchete temos o campo magnético devido ao movimento de q_2, campo este que não existia no referencial O. O resultado combinado destas duas modificações é que a força eletromagnética resultante sofre uma diminuição pelo fator $(1-V^2/2c^2)$ em relação à força de Lorentz no referencial O.

E é por este motivo que se diz no eletromagnetismo clássico que os campos elétrico e magnético se transformam um no outro dependendo do referencial. Por isto também se afirma que não há realidade física em nenhum deles separadamente, mas apenas na força eletromagnética como um todo.

(C) Cargas em movimento retilíneo uniforme ortogonal.

Vamos agora supor uma situação física diferente. Agora ainda temos duas cargas q_1 e q_2 se movendo com velocidade constante (isto pode ser obtido com forças mecânicas externas ao sistema), $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = 0$, mas de tal forma que no instante t elas se encontrem na situação da figura 5.3:

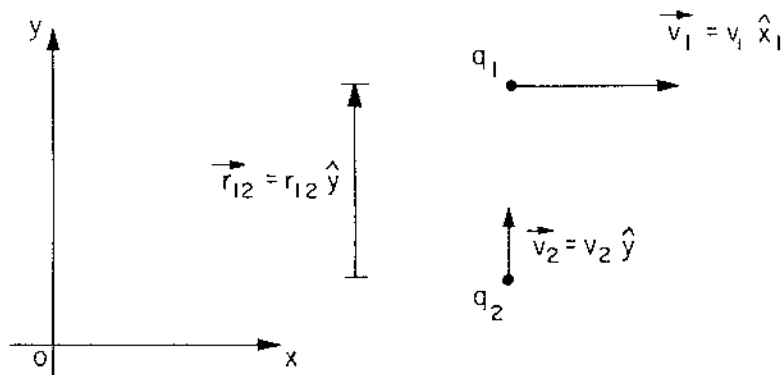



Figura 5.3

Aplicando a força de Weber (5.6) neste caso obtem-se que

$$\vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(v_1^2 - \frac{v_2^2}{2}\right)\right] = -\vec{F}_{12}^W \quad . \tag{5.10}$$

Já no caso de Lorentz vem de (5.4) e (5.5) que

$$\vec{F}_{21}^L = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2}\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) \quad , \tag{5.11}$$

$$\vec{F}_{12}^L = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2}\left[\left(1 + \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\hat{y} + \frac{v_1 v_2}{c^2}\hat{x}\right] \quad . \tag{5.12}$$

Este exemplo ilustra mais uma vez que Weber sempre satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte, enquanto que Lorentz não o satisfaz nem mesmo na forma fraca em alguns casos. A situação da figura 5.3 é o análogo para cargas da situação da figura 3.1 para elementos de corrente neutros.

No exercício 5.2 são discutidas outras situações com as quais se pode ver a distinção entre as forças de Weber e de Lorentz.

5.5 - Campo Elétrico Devido a uma Corrente Estacionária

Nesta seção trataremos de uma diferença específica entre as forças de Weber e de Lorentz que pode em princípio ser testada no laboratório. Esta diferença tem a ver com a componente da força proporcional ao quadrado da velocidade das fontes. Este é um assunto que desenvolvemos num artigo recente: (Assis, 1991 a).

Supomos então um fio reto infinito colocado em repouso ao longo do eixo Z. Neste fio supomos haver uma corrente estacionária I_2 que não varia com o tempo. Supondo que o fio seja um condutor metálico usual temos que apenas os elétrons se movem. De tudo isto vem: $\vec{v}_{2+} = 0$, $\vec{a}_{2+} = 0$, $\vec{v}_{2-} = V_D\hat{z}$, e $\vec{a}_{2-} = 0$ (designamos pelo índice 2 às cargas do fio e V_D é a velocidade de migração ou drifting dos elétrons). Como usualmente ocorre na prática, supomos que o fio é neutro eletricamente, $\lambda_{2-} = -\lambda_{2+}$, onde λ é a densidade linear de carga. Calculamos então a força que este fio exerce sobre uma carga q_1 situada em $\vec{r}_1$ com velocidade $\vec{v}_1$ e aceleração $\vec{a}_1$ (ver figura 5.4):

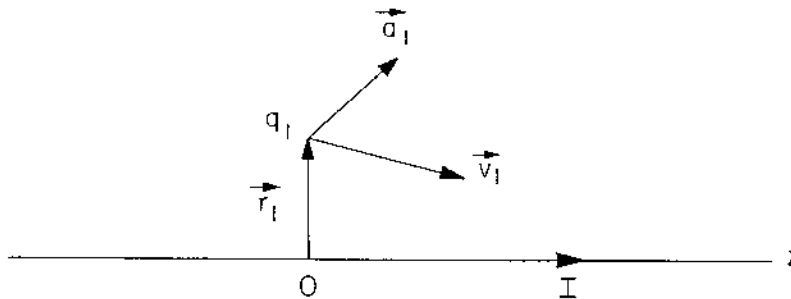



Figura 5.4

Fazendo os cálculos a partir do eletromagnetismo clássico vem que a força de Lorentz resultante neste caso é dada por (ver exercício 5.3):

$$\vec{F}_L = q_1\vec{v}_1 \times \vec{B}_2 \quad , \tag{5.13}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_o I_2}{2\pi\rho_1}\hat{\varphi}_1 \ . \tag{5.14}$$

Nestas expressões usamos coordenadas cilíndricas ($\vec{r}_1 = \rho_1\hat{\rho}_1 + z_1\hat{z}$, $z_1 = 0$, φ_1 é o ângulo azimutal e ρ_1 é a distância de q_1 ao fio). Temos ainda que $I_2 = \lambda_{2-}V_D = -\lambda_{2+}V_D$, onde λ_{2-} é a densidade linear de carga dos elétrons livres no fio. Vemos então que segundo Lorentz o fio não gera campo elétrico, mas apenas um campo magnético poloidal que cai com $1/r$.

Por outro lado usando a força de Weber (5.6) obtemos que a força resultante do fio em q_1 é dada por (ver exercício 5.4, e Assis, 1991 a):

$$\vec{F}_W = q_1\vec{E}_M + q_1\vec{v}_1 \times \vec{B}_2 \quad , \tag{5.15}$$

onde $\vec{B}_2$ é dado por (5.14) e $\vec{E}_M$ é dado por (ver Assis, 1991 a; e Wesley, 1987 b, e 1990 a, b):

$$\vec{E}_M = -\frac{\mu_o|I_2V_D|}{4\pi\rho_1}\hat{\rho}_1 \quad . \tag{5.16}$$

Vemos então que a única diferença entre Weber e Lorentz é que a força de Weber prevê uma força adicional em q_1 dada por $q_1\vec{E}_M$. Esta força é independente da velocidade de q_1 e então podemos chamar $\vec{E}_M$ de um campo elétrico. Só que este não é um campo elétrico usual pois o fio é neutro eletricamente e ele só surge devido ao fato de os elétrons no fio se moverem enquanto os íons positivos ficam parados, de tal forma que a força de Weber de cada uma destas componentes em q_1 é diferente. Vemos então que este campo elétrico surge devido ao movimento das cargas fontes ("motional electric field") e é proporcional ao quadrado da corrente, e aponta sempre na mesma direção independente da direção da corrente.

Embora esta força $q_1\vec{E}_M$ não tenha análogo no eletromagnetismo clássico, não é fácil de ser testada experimentalmente pois é muito pequena, de segunda ordem (proporcional a V_D^2/c^2). Por exemplo, se tivermos uma corrente de 10^3A e uma carga elétrica q_1 típica de laboratório, de $q_1 \simeq 10^{-10}$ C, então esta força será da ordem de $10^{-13}N$ para uma separação $\rho_1 \simeq 10$ cm. Esta força é extremamente pequena e difícil de detectar. O melhor experimento de que temos conhecimento para tentar detectar tal força é devido a Edwards e outros (Edwards, Kenyon e Lemon, 1976). Eles mediram uma diferença de

potencial associada a este campo e encontraram algo desta ordem de grandeza. Além disto concluíram que o campo apontava radialmente em direção à corrente, independente do sentido em que esta fluía, e que era proporcional ao quadrado da corrente. Apesar de todas estas evidências não se pode dizer que o experimento seja conclusivo e mais pesquisas experimentais são necessárias antes de se tirar qualquer conclusão.

Alguns artigos que têm saído na literatura relacionados a esse assunto estimulante: (Bartlett e Ward, 1977), (Bonnet, 1981), (Curé, 1982), (Sansbury, 1985), (Gray, 1988, págs. 1-4 e 1-5), (Hayden, 1990), (Ivezić, 1990), (Bartlett e Maglic, 1990), (Bartlett e Edwards, 1990), (Kenyon e Edwards, 1991); ver também (O'Rahilly, 1965, Vol. 2, págs. 588-590).

5.6 - Forças Dentro de um Capacitor

Uma outra componente da força de Weber que não tem análogo no eletromagnetismo clássico é aquela que depende apenas do quadrado da velocidade da carga que sente a força, mas que não depende da velocidade das cargas-fonte. A seguir ilustramos uma situação onde esta componente aparece explicitamente. Este é um assunto que desenvolvemos em dois artigos recentes: (Assis, 1989 b, Assis e Caluzi, 1991).

Seja então um capacitor de placas paralelas com separação entre as placas d muito menor do que o tamanho das placas L, $d \ll L$, de tal forma que para os cálculos possamos supor as placas infinitas (ou seja, vamos desprezar os efeitos de borda). Supondo as placas situadas nos planos $x = x_o$ e $x = -x_o$, com densidades superficiais de carga σ_A e $-\sigma_A$, respectivamente, vem que o campo elétrico clássico no interior do capacitor é dado por

$$\vec{E}_c = -\frac{\sigma_A}{\varepsilon_o} \hat{x} \quad , \tag{5.17}$$

onde $\hat{x}$ é um versor apontando da placa negativa à positiva:

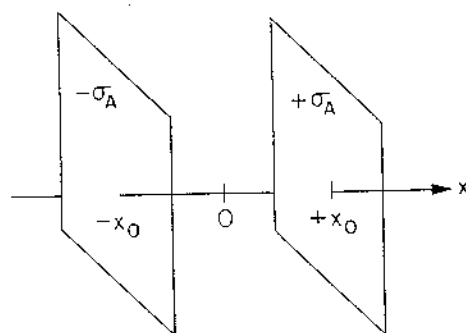



Figura 5.5

Como o capacitor não gera nenhum campo magnético e a situação é estacionária no tempo, vem pela força de Lorentz que a única força que pode atuar sobre uma carga q_1 que se move em seu interior é dada por $q_1\vec{E}_c$.

Já com a força de Weber a situação não é tão simples. Usando (5.6) pode-se calcular a força em q_1 neste caso e o que se obtem, supondo $\vec{r}_1 = x_1\hat{x}$ $(-x_o < x_1 < x_o)$, e q_1 podendo

estar em movimento e acelerada é (ver exercício 5.5 e a referência Assis, 1989 b):

$$\vec{F} = -q_1 \frac{\sigma_A}{\varepsilon_o} \left\{ \hat{x} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{v_1^2}{2} \hat{x} \right.\right.$$

$$\left.\left. - v_{1x}(v_{1y}\hat{y} + v_{1z}\hat{z}) + 2x_1 a_{1x}\hat{x} - x_1 \vec{a}_1 \right] \right\} \quad , \tag{5.18}$$

onde $\vec{v}_1$ é a velocidade de q_1 e $\vec{a}_1$ sua aceleração relativo às placas do capacitor.

Em primeiro lugar observamos que esta expressão só recai no caso clássico quando $\vec{v}_1 = 0$ e $\vec{a}_1 = 0$. Os termos a mais que aparecem nesta expressão e que não têm similar em nenhuma das componentes da força de Lorentz (5.4) são os termos que estão entre colchetes. Vemos que eles dependem do quadrado da velocidade da carga que sente a força e também de sua aceleração, e nada disto aparece na força de Lorentz.

Não conhecemos nenhum experimento feito especificamente para determinar a existência ou não dos termos que aparecem dentro dos colchetes em (5.18). Em (Assis, 1989 b) discutimos como estes termos fornecem uma explicação alternativa aos famosos experimentos de Kaufmann e Bucherer de variação da massa com a velocidade: Ou a força dentro do capacitor é dada por $q_1\vec{E}_c$ qualquer que seja a velocidade da partícula e a massa varia relativisticamente como $m = m_o/(1 - v_1^2/c^2)^{1/2}$; ou então a força dentro do capacitor é dada por (5.18) e a massa da partícula é uma constante qualquer que seja sua velocidade. Embora estas duas explicações sejam fisicamente bem distintas, ambas fornecem a mesma expressão para aquilo que é observado nos experimentos de Bucherer, pelo menos até segunda ordem, inclusive, em v_1/c. Após escrevermos este artigo descobrimos que as experiências de Kaufmann e Bucherer não tiveram precisão além da segunda ordem em v_1/c. Para a análise destes experimentos e desta informação ver: (Zahn e Spees, 1938) e (Faragó e Janossy, 1957). O que se pode concluir disto é que para esta situação experimental específica, as duas explicações são igualmente satisfatórias.

Além disto Wesley mostrou recentemente (Wesley, 1990 a, b) que no caso deste experimento (ver sua descrição em Rosser, 1964, pág. 193) as velocidades obtidas da lei de Weber e do eletromagnetismo clássico são funções diferentes dos campos $\vec{E}_c$ e $\vec{B}$. Expressando o que é medido experimentalmente não mais em função das velocidades, mas

sim de $\vec{E}_c$ e $\vec{B}$, Wesley obteve que a lei de Weber também tem termos de quarta ordem e que estes são praticamente os mesmos que os da relatividade. Ou seja, mesmo que estes experimentos houvessem tido precisão até quarta ordem não seria possível distinguir as duas explicações alternativas. Para uma discussão maior sobre todo este assunto ver também (Assis e Caluzi, 1991; Moon e Spencer, 1955; O'Rahilly, 1965, Vol. 2, págs. 249 a 250 e 613 a 622; e Bush, 1926).

5.7 - Limitações da Lei de Weber

Neste livro vimos vários aspectos positivos da força de Weber: É uma lei completamente relacional (tem o mesmo valor para todos os observadores), satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte, e os princípios de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Além disto com ela se derivam a força de Coulomb e a força entre elementos de corrente de Ampère. Vimos também como se derivam a partir de Weber as equações de Maxwell: lei de Gauss, da não existência de monopólos magnéticos, lei circuital de Ampère e lei de indução de Faraday. Apresentamos e discutimos os principais pontos da controvérsia Ampère contra Grassmann e os experimentos relacionados com isto. Então comparamos as forças de Weber e de Lorentz e vimos que elas são praticamente equivalentes em seus resultados. Mostramos que a única diferença é que a lei de Weber prevê alguns pequenos termos adicionais que não aparecem na força de Lorentz. Discutimos alguns experimentos ligados com estes termos e como eles ainda não são conclusivos para decidir a questão. Para uma discussão mais aprofundada destes e de outros experimentos ver (Assis, 1990 a).

Apesar dos aspectos positivos da lei de Weber mencionados acima, devemos ressaltar que a força de Weber é apenas um modelo de interação entre cargas que descreve uma certa classe de fenômenos. Como tal ela pode estar sujeita a limitações e seu grau de validade pode não ser ilimitado. Por exemplo, pode ser que um modelo de interação mais completo que a lei de Weber inclua também termos de quarta ordem em v/c, do tipo $\dot{r}^4/c^4$, ou termos como d^3r/dt^3, etc. Caso isto seja verdade então a validade da lei de Weber iria apenas até a segunda ordem em v/c, inclusive. Isto é, para cargas que se movem a velocidades extremamente próximas à da luz pode ser que a lei de Weber não se aplique como tal. No momento não sabemos se a lei de Weber tem ou não esta limitação de validade, mas nos parece importante alertar para esta possibilidade provável. Phipps, por exemplo (Phipps, 1990 b, c), propôs uma energia potencial dada por $U^p = (q_1 q_2/4\pi\varepsilon_o r_{12})(1 - \dot{r}^2/c^2)^{1/2}$ para resolver os problemas que Helmhotz havia apontado na teoria de Weber, a saber, a existência do assim chamado "comportamento de massa negativa" (Helmholtz 1872; Maxwell 1954, Volume 2, Cap. 23, artigo 854, pág. 485; Whittaker, Volume 1, págs. 203-

4). Embora com este potencial Phipps tenha sucedido em superar as críticas de Helmholtz, obviamente seu potencial não é o único que pode fazer isto. De qualquer forma este é um exemplo específico de como generalizar a eletrodinâmica de Weberr para ordens superiores em v/c.

Um outro aspecto que tem de ser lembrado é que apesar da força de Weber incluir termos de velocidade e aceleração, ainda assim ela é uma lei de ação à distância. Outras forças deste tipo são a força gravitacional Newtoniana e a força elétrica Coulombiana. Leis deste tipo implicam em que se um corpo estava parado em relação ao outro e de repente se move (devido a uma força externa, por exemplo), o outro sente instantaneamente uma mudança de força, qualquer que seja sua distância do primeiro corpo. Isto pode ser um aspecto positivo (Graneau, 1990 a, b, c, d) em vista das ações não locais que aparecem na mecânica quântica. Por outro lado pode ser que todas as interações viajem a uma velocidade finita (por exemplo, com a velocidade da luz). Mas a lei de Weber, como tal, não descreve esta última idéia.

Aliás foi exatamente este um dos principais motivos pelos quais durante este século a maior parte dos cientistas se concentraram na eletrodinâmica clássica (equações de Maxwell, mais a força de Lorentz e os potenciais de Lienard-Wiechert) e não na eletrodinâmica de Weber. E isto porque vinte anos depois de Weber ter apresentado sua lei de força veio Maxwell e sua teoria eletromagnética da luz. Embora inicialmente a teoria de Maxwell não tivesse sido bem aceita no continente (França, Alemanha, Itália, etc.) a situação mudou completamente com as experiências de Hertz no período 1885 - 1889, que confirmaram experimentalmente as previsões teóricas de Maxwell. Uma descrição dos experimentos de Hertz se encontra em seu livro: (Hertz, 1962). A partir de então a ênfase passou a ser em teorias de campo nas quais as interações viajam com a velocidade da luz, e não mais em teorias do tipo de ação à distância.

Para descrever ondas eletromagnéticas e um retardo na propagação das interações a partir de teorias de ação à distância há algumas alternativas. Uma delas é utilizando a lei de indução de Faraday num sistema de muitos corpos (Graneau, 1987 d). Uma outra maneira de obter ondas eletromagnéticas ou efeitos retardados com a lei de Weber é usando simultaneamente a equação de conservação de cargas (1.45). Um exemplo disto

foi a obtenção da corrente de deslocamento na seção 3.5 usando esta equação. Lembrar que para a obtenção de ondas eletromagnéticas foi fundamental para Maxwell este termo da corrente de deslocamento.

Uma outra maneira é introduzir diretamente na lei de Weber o tempo retardado. Isto é, substitui-se t por $t - r_{12}/c$ em todos os termos da lei de Weber. Nos tempos recentes as idéias de tempo retardado foram desenvolvidas por Sciama (Sciama, 1953) e Brown (Brown, 1982), entre outros. Já a aplicação do tempo retardado especificamente na lei de Weber é devida a Moon e Spencer (Moon e Spencer, 1954 a, b, c), e a Wesley (Wesley, 1987 b, 1990 a, b, 1991, Cap. 6). Para uma discussão suplementar sobre os diferentes modelos de propagação do potencial ver ainda (Clausius, 1868) e (Archibald, 1986). Neste livro não discutiremos estes aspectos já que eles estão além da eletrodinâmica de Weber em sua forma original.

Um último aspecto que queremos lembrar é que a teoria de circuitos elétricos foi inicialmente desenvolvida por Weber e Kirchhoff, com trabalhos importantes em 1856 e 1857. O trabalho de Weber foi realizado um pouco antes que o de Kirchhoff, mas foi publicado com atraso. Embora eles tenham trabalhado independentemente um do outro, ambos utilizaram a eletrodinâmica de Weber como base do trabalho. Em particular eles foram os primeiros a mostrar que uma perturbação elétrica (um pulso de corrente ou de voltagem, por exemplo) viaja num fio com resistência desprezível com uma velocidade igual à velocidade da luz no vácuo. O importante a ser ressaltado é que este resultado foi obtido a partir da teoria de ação à distância de Weber num problema de muitos corpos (um fio único mas constituído de várias cargas). E isto foi realizado antes do surgimento da teoria de Maxwell, que só apareceu de forma completa em 1860 - 1864. Para estas e outras informações relacionadas com este tópico ver: (Whittaker, Vol. 1, págs. 224 - 236), (Rosenfeld, 1956), (O'Rahilly, 1965, Vol. 2, págs. 523 - 535), (Jungnickel e McCormmach, 1986, Vol. 1, págs. 87, 125 - 146, 151 - 155, e 296 - 301). Ver ainda (Kirchhoff, 1857 a, b).

Iniciamos este livro com as palavras de Maxwell. Vamos terminá-lo com as palavras de O'Rahilly, escritas em sua obra máxima (nosso grifo): *Electromagnetic Theory* - A **Critical** Examination of Fundamentals. Neste trecho temos um resumo das coisas que

Weber realizou e das idéias que defendeu (entre colchetes vão nossas palavras):

"Se qualquer homem merece crédito pela idéia sintética que unifica os vários ramos da ciência elétrica e magnética, este homem é Wilhelm Weber. Hoje, mesmo aqueles que defendem a teoria do éter ou que professam serem relativistas aceitam estes princípios introduzidos ou desenvolvidos por ele: que a idéia de Ampère do magnetismo como sendo devido a micro-correntes pode explicar fenômenos relevantes; que a eletricidade tem uma estrutura atômica [isto é, granular ou corpuscular]; que as correntes são fluxos de partículas; que as forças de Ampère [entre elementos de corrente] agem diretamente entre estas partículas e não entre os condutores; que a lei de Coulomb deve ser modificada para cargas em movimento; que, como disse Gauss, a ação não é instantânea; que as leis da eletrodinâmica [força entre elementos de corrente de Ampère] e da indução podem ser deduzidas por uma soma estatística, a partir de uma fórmula de força para partículas [cargas] elétricas. Mesmo seu princípio balístico, submerso por tanto tempo pelos eteristas e relativistas, parece que provavelmente desafiará os físicos mais uma vez na forma desenvolvida dada a ele por Walther Ritz." (O'Rahilly, 1965, Vol. 2, pág. 535).

5.8 - Exercícios

5.1 - (A) O campo magnético de Lorentz é dado pela segunda chave de (5.4). Supondo elementos de corrente neutros eletricamente, $dq_{2-} = -dq_{2+}$ e $dq_{2+} = \lambda_{2+} dl_2$, onde dl_2 é o comprimento do elemento de corrente, some as contribuições das cargas positivas e negativas ao campo magnético e use (3.4) para chegar no campo magnético de Biot-Savart (3.8).

(B) Agora vai-se usar toda a expressão (5.4). Suponha elementos de corrente neutros e que $dq_{2-} = -dq_{2+} = -\lambda_{2+} dl_2$, $dq_{1-} = -dq_{1+} = -\lambda_{1+} dl_1$. Some então as forças entre os pares de carga usando (5.4) para chegar na força de Grassmann, isto é

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = d^2 \vec{F}_{2+,1+} + d^2 \vec{F}_{2+,1-} + d^2 \vec{F}_{2-,1+} + d^2 \vec{F}_{2-,1-} \ .$$

Nesta expressão $d^2 \vec{F}_{21}^G$ é dado por (3.7) e (3.8), ou por (3.10). Para chegar nisto use ainda (3.3) e (3.4).

Este exercício ilustra mais uma vez que a partir da força de Lorentz se chega na força de Grassmann, e não na força de Ampère.

5.2 - (A) Use (5.4) a (5.6) para calcular a força entre duas cargas que se movem ao longo do eixo X com mesma velocidade, isto é: $\vec{r}_1 = x_1 \hat{x}$, $\vec{r}_2 = x_2 \hat{x}$, $\vec{v}_1 = V_o \hat{x}$, $\vec{v}_2 = V_o \hat{x}$. Compare Weber e Lorentz.

(B) Compare novamente Weber e Lorentz, (5.4) a (5.6), quando $\vec{r}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y}$, $\vec{r}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y}$, $\vec{v}_1 = V_o \hat{x}$ e $\vec{v}_2 = V_o \hat{y}$. Observe se é previsto algum torque neste caso.

5.3 - Derivação de (5.13).

(A) Como o fio é neutro eletricamente vem que $\phi_2 = 0$. Como a corrente é estacionária, constante no tempo, vem que $\partial \vec{A}_2 / \partial t = 0$. De (1.31) vem que: $\vec{E}_2 = 0$. Use então (1.32) e o campo magnético de Biot-Savart (1.20) para chegar em (5.13). Para isto tem-se de calcular a integral (1.20) e pode-se usar, sem perda de generalidade, $z_1 = 0$, tal que $\vec{r}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y}$. Tem-se ainda: $d\vec{l}_2 = dz_2 \hat{z}$.

(B) Uma outra maneira de calcular o campo magnético $\vec{B}_2$ é usando a lei circuital de Ampère (1.49). Como a situação é estacionária vem que $d\Phi_E/dt = 0$. Use como circuito $\mathcal{C}$ um círculo centrado no eixo Z, onde passa a corrente I_2. Como por simetria $\vec{B}_2$ é poloidal, vem que $\vec{B}_2$ é paralelo a $d\vec{l}_2$ em cada ponto deste circuito. Como $\int\int \vec{J}_2 \cdot d\vec{a}_2 = I_2$, vem que se pode obter $\vec{B}_2$ de (1.49). Calcule-o para ver que é dado por (5.14).

5.4 - Derivação de (5.15).

(A) Parta de (5.6) para calcular a força de um elemento de corrente em q_1. Substitua q_2 por $dq_2 = \lambda_2 dz_2$. Suponha um elemento de corrente neutro eletricamente, isto é, $\lambda_{2-} = -\lambda_{2+}$. Some as forças de $\lambda_{2+}dz_2$ e $\lambda_{2-}dz_2$ em q_1, lembrando que $\vec{r}_2 = z_2\hat{z}$, $\vec{v}_{2+} = 0$, $\vec{a}_{2+} = 0$, $\vec{v}_{2-} = V_D\hat{z}$, $\vec{a}_{2-} = 0$. Use ainda $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y}$, $\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{x} + v_{1y}\hat{y} + v_{1z}\hat{z}$, e $\vec{a}_1 = a_{1x}\hat{x} + a_{1y}\hat{y} + a_{1z}\hat{z}$.

(B) Integre o resultado anterior em z_2 de $-\infty$ a $+\infty$.

(C) Use os seguintes fatos para colocar o resultado anterior na forma (5.15) e (5.16): $x_1 = \rho_1 \cos\varphi_1$, $y_1 = \rho_1 \sin\varphi_1$, $\rho_1 = \hat{x}\cos\varphi_1 + \hat{y}\sin\varphi_1$, $\hat{\varphi}_1 = -\hat{x}\sin\varphi_1 + \hat{y}\cos\varphi_1$, e que $\vec{G}_1 \times \vec{G}_2 = (\vec{G}_{1y}G_{2z} - G_{1z}G_{2y})\hat{x} + (G_{1z}G_{2x} - G_{1x}G_{2z})\hat{y} + (G_{1x}G_{2y} - G_{1y}G_{2x})\hat{z}$.

5.5 - Derivação de (5.18).

(A) Use (5.6) para calcular a força de um elemento das placas em q_1. Substitua q_2 por $dq_2 = \pm\sigma_A da_2$, onde σ_A é a densidade superficial de carga na chapa de cima e da_2 um elemento de área. Sem perda de generalidade já que as placas são infinitas, coloque $y_1 = z_1 = 0$ no tempo t. Deixe as velocidades e acelerações gerais de tal forma que $\vec{v}_1 = \hat{x}v_{1x} + \hat{y}v_{1y} + \hat{z}v_{1z}$, $\vec{a}_1 = \hat{x}a_{1x} + \hat{y}a_{1y} + \hat{z}a_{1z}$. Use coordenadas "cilíndricas" mas com o eixo de simetria sendo o eixo X. Some as contribuições de dq_{2+} e dq_{2-} localizadas em $(\pm x_o, y_2, z_2)$.

(B) Integre o resultado anterior primeiro em φ_2 de O a 2π, e depois em $\rho_2 = (x_2^2+y_2^2)^{1/2}$ de O a R.

(C) Faça o limite em que R tende a infinito.

(D) Obtenha então (5.18) rearranjando os termos.

APÊNDICE A

As Origens e os Significados da Força Magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Como vimos no capítulo 1, a componente elétrica da força de Lorentz ($\vec{F}_E = q\vec{E}$, com $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$) já era usada desde pelo menos 1857 com Kirchhoff, quando ele escreveu a lei de Ohm de maneira generalizada incluindo os efeitos de auto-indutância. O potencial vetor magnético $\vec{A}$ havia sido introduzido por Franz Neumann em 1845, onde mostrou que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, sendo $\vec{B}$ o campo magnético. Já a expressão para a força magnética teve uma origem posterior e bem mais tortuosa, e este é o assunto deste apêndice.

A primeira informação relevante a ser ressaltada é que ela é posterior à morte de Maxwell, ocorrida em 1879. Segundo Whittaker os primeiros a chegarem na força magnética foram J. J. Thomson (1856 - 1940) e O. Heaviside (1850 - 1925), em 1881 e 1889, respectivamente (Whittaker, 1973, Vol. 1, págs. 306 a 310). Para uma análise bem detalhada dos trabalhos de Thomson e Heaviside ver (Buchwald, 1985, Apêndice Um).

Um dos objetivos do trabalho de Thomson de 1881 (Thomson, 1881) era saber de que forma um corpo carregado eletricamente é afetado por um ímã. Thomson segue a teoria de Maxwell e em particular usa a idéia de que uma corrente de deslocamento ($\varepsilon\partial\vec{E}/\partial t$) produz os mesmos efeitos que uma corrente de condução $\vec{J}$ usual, isto é, de que também gera $\vec{B}$. Supõe então uma esfera uniformemente carregada se movendo num certo meio com constante dielétrica ε e permeabilidade magnética μ, e calcula a corrente de deslocamento num ponto externo Q. Depois calcula num outro ponto externo P o valor do potencial vetor magnético $\vec{A}$ devido a esta corrente de deslocamento em Q, e integra para todos os pontos Q do espaço. Contudo observa que o valor $\nabla \cdot \vec{A}$ neste ponto P é diferente de zero. Maxwell sempre assumia $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e então para satisfazer a esta condição Thomson supõe a existência de uma outra componente em $\vec{A}$, adicionando esta componente ao que já havia obtido para $\vec{A}$ (não justifica qual a origem física desta componente adicional de $\vec{A}$). Através de $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ obtem então o valor de $\vec{B}$ no ponto P. Calcula então o valor de $\vec{H}$ neste meio, $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. Em seguida calcula a força de um ímã (que gera $\vec{B}$) num

corpo carregado eletricamente que se move por este meio. Para isto calcula a energia de interação $E = \int\int\int(\vec{B} \cdot \vec{H}/2)dV$, e usa as equações de Lagrange para obter a força. Seu resultado final:

$$\vec{F} = q\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{2} . \tag{A1}$$

Este valor é metade do aceito no eletromagnetismo clássico hoje em dia. O aspecto mais importante que queremos ressaltar aqui é o significado da velocidade que aparece em (A1). Neste ponto Thomson foi bem cuidadoso. Ele chamava esta velocidade de *velocidade real* ("actual velocity") da partícula. Na página 248 de seu artigo ele afirma (nosso grifo): "Deve ser observado que aquilo que por conveniência chamamos de velocidade real da partícula é, de fato, a *velocidade da partícula relativa ao meio através do qual ela está se movendo*," ..., "meio cuja permeabilidade magnética é μ." Ou seja, para Thomson a velocidade $\vec{v}$ em (A1) não era a velocidade da carga relativa ao éter, nem em relação ao ímã, e nem a velocidade em relação ao observador.

Em 1889 Heaviside obtem (Heaviside, 1889):

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} . \tag{A2}$$

A diferença principal de seu trabalho em relação ao de Thomson é que ele inclui, seguindo Fitzgerald em 1881, a corrente de convecção como fonte de campo magnético. Fora isto vem que Heaviside segue o trabalho de Thomson (um dos objetivos de seu artigo é corrigir o trabalho de Thomson). Como ele não faz nenhum comentário adicional sobre a velocidade $\vec{v}$ em (A2), pode-se assumir que também para ele aquela é a velocidade da carga q em relação ao meio de permeabilidade magnética μ e constante dielétrica ε. Isto pode ser visto pelo título de seu artigo.

Em 1892 e 1895 o físico teórico H. A. Lorentz apresenta a conhecida expressão (Lorentz, 1892 e 1895):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \tag{A3}$$

Lorentz não cita Thomson nem Heaviside, e aparentemente chegou na parte magnética desta expressão a partir da força de Grassmann substituindo $Id\vec{l}$ por $q\vec{v}$, embora ele também não cite o trabalho de Grassmann. Isto pode ser visto no livro mais famoso de Lorentz, *The Theory of Electrons* (Lorentz, 1915, págs. 14 e 15). Este livro é baseado em um curso que ministrou em 1906 na Universidade de Columbia, e foi editado pela primeira vez em 1909. Infelizmente Lorentz não especifica em (A3) em relação a que objeto, meio ou sistema deve ser entendida esta velocidade $\vec{v}$ da carga q. Como Lorentz ainda aceitava o éter de Maxwell (isto é, um meio em repouso absoluto em relação ao referencial das estrelas fixas, e através do qual a terra se move como se fosse transparente a ele, sem empurrá-lo ou arrastá-lo; ver (Pais, 1982, pág. 111)), é natural que para ele esta velocidade fosse em relação a este éter, e não em relação a qualquer meio ou observador. Em suporte a isto temos as próprias palavras de Lorentz nesta mesma página 14: "Agora, de acordo com os princípios gerais da teoria de Maxwell, vamos considerar esta força como causada pelo estado do éter, e mesmo, como este meio penetra os elétrons [nome que Lorentz usava para as cargas elétricas em geral], como exercida pelo éter sobre todos os pontos internos destas partículas onde há uma carga." Uma prova conclusiva desta interpretação se encontra em outro trabalho de Lorentz: *Lectures on Theoretical Physics* (Lorentz, 1927, Vol. 3, pág. 306; ver também O'Rahilly, 1965, Vol. 2, pág. 566). Aí Lorentz afirma que se um fio com corrente elétrica (e portanto gerando $\vec{B}$) e uma carga estão parados em relação ao éter, então não vai haver força magnética. Por outro lado se ambos estiverem transladando com a mesma velocidade $\vec{v}$ em relação ao éter (sendo que o observador e o laboratório também transladam com esta mesma velocidade $\vec{v}$, já que dá como exemplo desta velocidade a velocidade da terra em relação ao éter), então afirma que vai haver uma força magnética. Ou seja, como na segunda parte deste exemplo não há velocidade relativa da carga em relação ao fio, nem em relação ao laboratório, nem em relação ao observador, mas apenas em relação ao éter, e ainda assim há uma força magnética, se conclui que para ele aquela velocidade que aparece em (A3) é realmente a velocidade da carga q em relação ao éter.

Por outro lado hoje em dia se usa a expressão (A3) com $\vec{v}$ sendo a velocidade da carga q em relação a um observador. A mudança ocorreu a partir do trabalho da relatividade restrita de Einstein de 1905 (Einstein, 1978). Neste trabalho, após obter as transformações

de coordenadas de Lorentz, Einstein as aplica para a força (A3) e passa a usar a velocidade como sendo a velocidade em relação ao observador. Por exemplo, na página 71 coloca (entre colchetes são nossas palavras) a diferença entre a antiga visão do eletromagnetismo e a visão baseada em sua teoria da relatividade:

"1 - Se um pólo elétrico unitátio [$q = 1$], puntiforme, se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força elétrica [$\vec{F}_E = q\vec{E}$], uma "força eletromotriz" que, desprezando termos em que entram como fatores potências de v/c de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vetorial formado com a velocidade do pólo unidade e com a força magnética [isto é, $\vec{B}$, tal que $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}/c$, Einstein usa aqui o sistema de unidades cgs-Gaussiano. Logo a força resultante é: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}/c$]. (Antigo enunciado)

2 - Se um pólo elétrico puntiforme unidade se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele uma força idêntica à força elétrica [$\vec{F}' = q\vec{E}'$] que se obtem no ponto ocupado pelo pólo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas [$O \rightarrow O'$], a fim de o referir a um sistema de eixos [O'] que esteja imóvel em relação ao referido pólo [$\vec{v}\,' = 0$, logo $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}/c = q\vec{E}'$, onde as variáveis com $'$ se referem aos campos no sistema de coordenadas O' que se move com $\vec{v}$ em relação a O]. (Novo enunciado)"

Aparentemente Lorentz passou a aceitar esta interpretação do significado de $\vec{v}$ em (A3). Vemos isto nas páginas 198, 199, 330 e 331 de seu livro *The Theory of Electrons* (Lorentz, 1915). Estas duas últimas páginas, em particular, apareceram apenas na segunda edição do livro, em 1915.

É instrutivo ver esta mudança conceitual (mas não de forma) numa das leis mais utilizadas na física.

APÊNDICE B

Lagrangeana e Hamiltoniana de Weber

Na mecânica clássica podemos descrever e resolver os problemas usando as equações de Newton. Equivalentemente podemos fazê-lo usando as chamadas equações de Lagrange ou as de Hamilton. Também se pode fazer o mesmo na eletrodinâmica de Weber, como ele o mostrou entre 1869 e 1871 (Weber, 1871). É este o assunto deste apêndice.

Vamos tratar do movimento de duas cargas q_1 e q_2 de massas m_1 e m_2, interagindo entre si de acordo com a lei de Weber, e sem a presença de forças externas (a generalização para N cargas é direta). Definimos duas funções S e T por:

$$S \equiv \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r_{12}}\left(1 + \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}\right) , \tag{B1}$$

$$T \equiv m_1\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2} + m_2\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2} . \tag{B2}$$

Nestas equações $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são as velocidades das cargas q_1 e q_2 em relação a um referencial inercial, $\vec{v}_1 \equiv d\vec{r}_1/dt$, $\vec{v}_2 \equiv d\vec{r}_2/dt$, e $r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt$.

Weber definiu sua Lagrangeana na forma

$$L \equiv T - S . \tag{B3}$$

A força de Weber pode ser obtida da maneira usual da formulação Lagrangeana a partir de S. Isto é, sendo $\dot{x}_1 \equiv dx_1/dt$, onde $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$ é o raio vetor de q_1, temos que a componente x da força sobre q_1 é dada por

$$F_{21}^x = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3}\left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right) . \tag{B4}$$

Nesta equação $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt$.

Fazendo o mesmo com as outras componentes e com as variáveis da carga q_2 obtem-se:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} + \frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2} \right) = -\vec{F}_{12} \ . \tag{B5}$$

Já a Hamiltoniana do sistema é definida por

$$H \equiv \left(\sum_{k=1}^{6} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - L \ . \tag{B6}$$

Nesta equação $\dot{q}_k$, com k indo de 1 a 6, representa as componentes das velocidades, isto é, $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$, e $\dot{z}_2$, respectivamente.

Observando que S e T não dependem explicitamente do tempo vem que $\partial L/\partial t = 0$ e $\partial H/\partial t = 0$. Disto obtem-se que H é uma constante de movimento, $dH/dt = 0$, que neste caso é a própria energia E do sistema. De (B1) a (B6) vem então, após fazer as contas indicadas por (B6):

$$E = H = T + U \ , \tag{B7}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \ . \tag{B8}$$

Em (B7) U é a energia potencial de Weber que havia sido introduzida no capítulo 2 e que é dada por

$$U \equiv \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) \ . \tag{B9}$$

Queremos chamar a atenção que S é diferente de U já que ambas diferem no sinal em frente de $\dot{r}_{12}^2$. Embora a Lagrangeana seja dada por $L = T - S$, a Hamiltoniana e a energia que se conservam são dadas por $H = E = T + U$, e não por $T + S$. Algo análogo ocorre na mecânica e eletrodinâmica clássicas quando há potenciais generalizados que dependem não só da distância entre os corpos mas também de suas velocidades.

As equações de movimento são as equações de Lagrange usual, isto é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \ ; \ k = 1, \ \ldots \ , 6 \ . \tag{B10}$$

Nesta equação q_k representa cada uma das coordenadas x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 e z_2. Daí se obtem, após fazer as contas:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(1-\frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2}+\frac{r_{12}\ddot{r}_{12}}{c^2}\right)=m_1\vec{a}_1\ . \tag{B11}$$

Obtem-se o análogo para m_2. E isto é exatamente a segunda lei de Newton aplicada a uma força de Weber, CQD.

Sugerimos que o leitor refaça as contas indicadas nesta seção para que se familiarize com esta técnica.

REFERÊNCIAS

Aepinus, F. U. T.

- (1979) *Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism* (Princeton University Press, Princeton).

Ampère, A. M.

- (1825) Mémoire de l'Academie Royale des Sciences, Vol. **6**, p. 175, "Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l' expérience," tradução para o inglês em R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation* (Pergamon, Oxford, 1965), p. 155, "On the mathematical theory of electrodynamic phenomena, experimentally deduced."

- (1883) *Théorie des Phénomènes Électrodynamiques Uniquement Déduites de l'Experience* (Gauthier-Villars, Paris).

- (1958) *Théorie Mathématique des Phénomènes Électrodynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience* (Blanchard, Paris). Para uma tradução parcial em inglês ver (Ampère, 1825).

Archibald, T.

- (1986) American Journal of Physics, Vol. **54**, p. 786, "Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials."

Arzeliès, H.

- (1972) *Relativistic Point Dynamics* (Pergamon, Oxford).

Aspden, H.

- (1986) IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. **PS-14**, p. 282, "Anomalous electrodynamic explosions in liquids."

- (1987) Physics Letters A, Vol. **120**, p. 80,"The exploding wire phenomenon as an inductive effect."

Assis, A. K. T.

- (1989 a) Foundations of Physics Letters, Vol. **2**, p. 301, "On Mach' s principle."

- (1989 b) Physics Letters A, Vol. **136**, p. 277, "Weber's law and mass variation."

- (1990 a) em: *Proceedings of the Conference on the Foundations of Mathematics and Physics*, U. Bartocci e J. P. Wesley (editores), (Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, Alemanha, 1990), p. 8, "Modern experiments related to Weber's eletrodynamics."

- (1990 b) Hadronic Journal, Vol. **13**, p. 441, "Deriving Ampère's law from Weber's law."

- (1991 a) Physics Essays, Vol. **4**, p. 109, "Can a steady current generate an electric field?"

- (1991 b) Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência, Vol. **5**, p. 53, "Wilhelm Eduard Weber (1804 - 1891), sua vida e sua obra."

Assis, A. K. T. e Caluzi, J. J.

- (1991) Physics Letters A, Vol. **160**, p. 25, "A limitation of Weber's law."

Assis, A. K. T. e Clemente, R. A.

- (1992) "The ultimate speed implied by theories of Weber's type," a sair em International Journal of Theoretical Physics.

Atherton, W. A.

- (1989) Electronics and Wireless World, Vol. **95**, p. 521, "Gauss and Weber: an unlikely partnership."

Azevedo, R. e outros

- (1986) Physics Letters A, Vol. **117**, p. 101, "Powerful water-plasma explosions."

Barbour, J. B.

- (1989) *Absolute or Relative Motion?* - A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories; Volume 1: *The discovery of Dynamics* (Cambridge University Press,Cambridge).

Barbour, J. B. e Bertotti, B.

- (1977) Nuovo Cimento B, Vol. **38**, p. 1, "Gravity and inertia in a Machian framework."

Bartlett, D. F. e Edwards, W. F.

- (1990) Physics Letters A, Vol. **151**, p. 259, "Invariance of charge to Lorentz transformation."

Bartlett, D. F. e Maglic, S.

- (1990) Review of Scientific Instruments, Vol. **61**, p. 2637, "Test of an anomalous electromagnetic effect."

Bartlett, D. F. e Ward, B. F. L.

- (1977) Physical Review D, Vol. **16**, p. 3453, "Is an electron's charge independent of its velocity?"

Biot, J. B. e Savart, F.

- (1820) Annales de Chimie et de Physique, Vol. **15**, p. 222, "Note sur le magnétisme de la pile de Volta," tradução para o inglês em R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation* (Pergamon, Oxford, 1965), p. 118, "Note on the magnetism of Volta's battery."

- (1821) em: *Précis Élémentaire de Physique* (Gauthier - Villars, Paris), Vol. II, 2ª edição, p. 117, ibid. (1823), 3ª edição, p. 704; há uma reprodução deste texto em *Collection de Mémoires Publiés par la Societé Française de Physique* (Gauthier - Villars, Paris, 3 volumes, 1882-7), p. 80, "Sur l'aimantation imposée aux métaux par l'électricité en mouvement," tradução para o inglês em R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation* (Pergamon, Oxford, 1965), p. 119, "Magnetization of metals by electricity in motion."

Blondel, C.

- (1982) *A.-M. Ampère et la Création de l'Électrodynamique (1820 - 1827)* (Bibliothèque Nationale, Paris).

Bonnet, G.

- (1981) Physics Letters A, Vol. **82**, p. 465, "Electric field arising from a steady current passing through a superconductor."

Brown, G. B.

- (1955) Proceedings of the Physical Society B, Vol. **68**, p. 672, "A theory of action-at-a-distance."

- (1982) *Retarded Action-at-a-Distance* (Cortney Publications, Luton).

Buchwald, J. Z.

- (1985) *From Maxwell to Microphysics* - Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century (University of Chicago Press, Chicago).

Bush, V.

- (1926) Journal of Mathematical Physics, Vol. **5**, p. 129, "The force between moving charges."

Caneva, K. L.

- (1980) British Journal of History of Science, Vol. **13**, p. 121 , "Ampère, the etherians, and the Oersted connexion."

Christodoulides, C.

- (1987) Journal of Physics A, Vol. **20**, p. 2037, "Equivalence of the Ampère and Biot-Savart force laws in magnetostatics."

Clausius, R.

- (1868) Annalen der Physik, Vol. **135**, p. 606 ; tradução para o inglês em Philosophical Magazine, Vol. **37**, p. 445 (1869), "Upon the new conception of electrodynamic phenomena suggested by Gauss."

- (1880) Philosophical Magazine, Vol. **10**, p. 255, "On the employment of the electrodynamic potential for the determination of the ponderomotive and

electromotive forces."

Clemente, R. A. e Assis, A. K. T.

- (1991) International Journal of Theoretical Physics, Vol. **30**, p. 537, "Two-body problem for Weber-like interactions."

Cornille, P.

- (1989) Journal of Physics A, Vol. **22**, p. 4075, "On the difference between the Lorentz and Ampère force laws in magnetostatics."

Crowe, M. J.

- (1985) *A History of Vector Analysis* - The Evolution of the Idea of a Vectorial System (Dover, New York).

Curé, J. C.

- (1982) Physics Letters B, Vol. **116**, p. 158, "A modified version of the Millikan oil drop experiment to test the probable existence of a new electrodynamic field."

Eby, P. B.

- (1977) Lettere al Nuovo Cimento, Vol. **18**, p. 93, "On the perihelion precession as a Machian effect."

Edwards, W. F.

- (1974) Proceedings of the Utah Academy of Sciences, Arts, and Letters, Vol. **51**, Parte 2, p. 1, "Inertia and an alternative approach to the theory of interactions."

Edwards, W. F., Kenyon, C. S. e Lemon, D. K.

- (1976) Physical Review D, Vol. **14**, p. 922, "Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents."

Einstein, A.

- (1978) em: *O Princípio da Relatividade*, H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski (Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2ª edição), p. 47, "Sobre a

eletrodinâmica dos corpos em movimento," tradução do artigo original sobre a relatividade restrita de 1905.

Farogó, P. S. e Jánossy, L.

- (1957) Nuovo Cimento, Vol. **5**, p. **1411**, "Review of the experimental evidence for the law of variation of the electron mass with velocity."

Fechner, G. T.

- (1845) Annalen der Physik, Vol. **64**, p. 337, "Ueber die Verknupfung der Faraday'schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampèreschen elektrodynamischen Erscheinungen."

Feynman, R. P., Leighton, R. B., e Sands, M.

- (1977) *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. II (Addison - Wesley, Reading).

Ghosh, A.

- (1991) Apeiron, Vol. **9-10**, p. 35, "Velocity-dependent inertial induction: a possible tired-light mechanism."

Graneau, P.

- (1982 a) Nature, Vol. **295**, p. 311, "Electromagnetic jet-propulsion in the direction of current flow."

- (1982 b) Journal of Applied Physics, Vol. **53**, p. 6648, "Application of Ampere's force law to railgun accelerators."

- (1983) Physics Letters A, Vol. **97**, p. 253, "First indication of Ampere tension in solid electric conductors."

- (1984) Journal of Applied Physics, Vol. **55**, p. 2598, "Longitudinal magnet forces?"

- (1985 a) *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals* (Hadronic Press, Nonantum).

- (1985 b) Physics Letters A, Vol. **107**, p. 235, "Ampere and Lorentz forces."

- (1986) Fortschritte der Physik, Vol. **34**, p. 457, "The Ampere-Neumann

electrodynamics of metallic conductors."

- (1987 a) Journal of Physics D, Vol. **20**, p. 391, "Railgun recoil and relativity."

- (1987 b) Journal of Applied Physics, Vol. **62**, p. 3006, "Amperian recoil and the efficiency of railguns."

- (1987 c) Physics Letters A, Vol. **120**, p. 77, "Wire explosions."

- (1987 d) Hadronic Journal, Vol. **10**, p. 145, "Inertia, gravitation, and radiation time delays."

- (1989 a) Electronics and Wireless World, Vol. **95**, p. 556, "Alpha-torque forces."

- (1989 b) Journal of Physics D, Vol. **22**, p. 1083, "The cause of thunder."

- (1990 a) Electronics and Wireless World, Vol. **96**, p. 60 ,"The riddle of inertia."

- (1990 b) Speculations in Science and Technology, Vol. **13**, p. 191, "Far-action versus contact action."

- (1990 c) Physics Essays, Vol. **3**, p. 340, "Interconnecting action-at-a-distance."

- (1990 d) Hadronic Journal Supplement, Vol. **5**, p. 335, "Some cosmological consequences of Mach's principle."

Graneau, P. e Graneau, P. N.

- (1985) Applied Physics Letters, Vol. **46**, p. 468, "Electrodynamic explosions in liquids."

- (1986) Nuovo Cimento D, Vol. **7**, p. 31, "The electromagnetic impulse pendulum and momentum conservation."

Graneau, P., Thomson, D. S. e Morril, S. L.

- (1990) Physics Letters A, Vol. **145**, p. 396, "The motionally induced back-emf in railguns."

Grassmann, H.

- (1845) Annalen der Physik, Vol. **64**, p. 1, "Neue Theorie der Elektrodynamik," tradução para o inglês em R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation* (Pergamon, Oxford, 1965), p. 201, "A new theory of electrodynamics."

Gray, R. I.

- (1988) *Unified Physics* (Dahlgren, Virginia).

Halliday, D. e Resnick, R.

- (1984) *Física*, Vol. 3 (Livro Técnico, Rio de Janeiro, 4ª edição).

Harman, P. M.

- (1982) *Energy, Force, and Matter* - The conceptual development of nineteenth-century physics (Cambridge University Press, Cambridge).

Hayden, H.

- (1990) Galilean Electrodynamics, Vol. **1**, p. 33, "Possible explanation for the Edwards effect."

Heaviside, O.

- (1889) Philosophical Magazine, Vol. **27**, p. 324, "On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric."

Helmholtz, H. von

- (1872) Philosophical Magazine, Vol. **44**, p. 530, "On the theory of electrodynamics."

Hertz, H.

- (1962) *Electric Waves* - being researches on the propagation of electric action with finite velocity through space (Dover, New York).

Ivezić, T.

- (1990) Physics Letters A, Vol. **144**, p. 427, "The relativistic electric fields arising from steady conduction currents."

Jaakkola, T.

- (1987) Apeiron, Vol. **1**, p. 5, "Mach's principle and properties of local structure."

- (1991) Apeiron, Vol. **9-10**, p. 76, "Electro-gravitational coupling: empirical and theoretical arguments."

Jackson, J. D.

- (1975) *Classical Electrodynamics* (John Wiley, New York, 2ª edição).

Jungnickel, C. e McCormmach, R.

- (1986) *Intellectual Mastery of Nature* - Theoretical Physics from Ohm to Einstein, 2 volumes (University of Chicago Press, Chicago).

Kenyon, C. S. e Edwards, W. F.

- (1991) Physics Letters A, Vol. **156**, p. 391, "Test of current-dependent electric fields."

Kirchhoff, G.

- (1850) Philosophical Magazine, Vol. **37**, p. 463, "On a deduction of Ohm's laws, in connexion with the theory of electrostatics."
- (1857 a) Philosophical Magazine, Vol. **13**, p. 393, "On the motion of electricity in wires."
- (1857 b) Annalen der Physik, Vol. **102**, p. 529, "Ueber die Bewegung der Elektricitat in Leitern;" reproduzido em G. Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen* (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), p. 154.

Kirchner, F.

- (1957) American Journal of Physics, Vol. **25**, p. 623, "Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements according to W. Weber and R. Kohlrausch."

Kohlrausch, R. e Weber, W.

- (1857) Annalen der Physik, Vol. **99**, p. 10, "Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zuruckfuhrung der Stromintensitats - Messungen auf mechanisches Maas"; ver também W. Weber, *Werke*, Vol. 3, p. 609 (Springer,

Berlin, 1893); ver ainda Ostwald (editor), *Klassiker der Exacten Wissenschaften* (Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1968).

Liénard, A.

- (1898 a) L'Éclairage Électrique, Vol. **14**, págs. 417 e 456, "La théorie de Lorentz."

- (1898 b) ibid., Vol. **16**, págs. 5, 53 e 106, "Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque."

- (1898 c) ibid., Vol. **16**, págs. 320 e 360, "La théorie de Lorentz et celle de Larmor."

Lorentz, H. A.

- (1892) Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Vol. **25**, p. 363; H. A. Lorentz, *Collected Papers*, vol. 2 , p. 164 (Nyhoff, the Hague, 1936), "La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants."

- (1895) *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Korpern*, seção 12 (Brill, Leiden); H. A. Lorentz, *Collected Papers*, vol. 5, p. **1** (Nyhoff, the Hague, 1936).

- (1915) *The Theory of Electrons*, 2ª edição (Teubner, Leipzig); ver também, *Selected Works of H. A. Lorentz*, vol. 5, N. J. Nersessian (editor), (Palm Publications, Nieuwerkerk, 1987).

- (1927) *Lectures on Theoretical Physics*, vol. 3 (MacMilan, London).

Lorenz, L. V.

- (1867) Annalen der Physik, Vol. **131**, p. 243; Tradução para o inglês em Philosophical Magazine, Vol. **34**, p. 287 (1867), "On the identity of the vibrations of light with electrical currents."

Mach, E.

- (1953) *The Principles of Physical Optics* - An Historical and Philosophical

Treatment (Dover, New York).

- (1989) *The Science of Mechanics* - A Critical and Historical Account of its Development (Open Court, La Salle).

Martins, R. de A.

- (1986 a) Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Vol. **10**, p. 115, "Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética," tradução comentada do trabalho do H. C. Oersted de 1820.

- (1986 b) ibid., p. 89, "Oersted e a descoberta do eletromagnetismo."

Maxwell, J. C.

- (1954) *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 volumes (Dover, New York).

Moon, P. e Spencer, D. E.

- (1954 a) Journal of the Franklin Institute, Vol. **254**, p. 203, "Interpretation of the Ampère experiments."

- (1954 b) ibid., p. 305, "The Coulomb force and the Ampère force."

- (1954 c) ibid., p. 369, "A new electrodynamics."

- (1955) Journal of the Franklin Institute, Vol. **260**, p. 295, "On the Ampère force."

Moyssides, P. G.

- (1989 a) IEEE Transactions on Magnets, Vol. **25**, p. 4298, "Calculation of the sixfold integrals of the Biot-Savart-Lorentz force law in a closed circuit."

- (1989 b) ibid., p. 4307, "Calculation of the sixfold integrals of the Ampere force law in a closed circuit."

- (1989 c) ibid., p. 4313, "Experimental verification of the Biot-Savart-Lorentz and Ampere force laws in a closed circuit, revisited."

Moyssides, P. G. e Pappas, P. T.

- (1986) Journal of Applied Physics, Vol. **59**, p. 19, "Rigorous quantitative test of Biot-Savart-Lorentz forces."

Nasilowski, J.

- (1985) Physics Letters A, Vol. **111**, p. 315, "A note on longitudinal Ampere forces in gaseous conductors."

Neumann, F.

- (1845) Berlin Abhandlungen, p. 1, "Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Strome"; republicado como o vol. 10 da coleção *Klassiker der Exakten Wissenschaften* de F. Ostwald, Carl Neumann (editor), (Leipzig, 1889).
- (1848 a) Abh. Preuss. Akad., p. 1 , "Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Strome."
- (1848 b) Tradução para o francês em Journal de Mathematique, Vol. **13**, p. 113, "Recherches sur la théorie mathématique de l'induction."

Newton, I.

- (1952 a) *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Encyclopaedia Britannica, Chicago), este livro está no Vol. 34 da coleção *Great Books of the Western World.* Tradução para o português da primeira parte deste livro feita por T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia: *Principia - Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* (Nova Stella/Edusp, São Paulo, Vol. 1, 1990).
- (1952 b) *Optics* (Encyclopaedia Britannica, Chicago), este livro está no Vol. 34 da coleção *Great Books of the Western World.* Tradução para o português das Questões ao fim do Livro III feita por Pablo Rubén Mariconda: Coleção "Os Pensadores", Volume de *Newton e Leibniz* (Editora Abril Cultural, São Paulo, 1983, 2ª edição).

Oersted, H. C.

- (1986) Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Vol. **10**, p. 115, "Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética," tradução do trabalho fundamental de 1820 de Oersted, feita por R. de A. Martins (ver Martins 1986 a, b).

O'Rahilly, A.

- (1965) *Electromagnetic Theory* - A Critical Examination of Fundamentals, 2 volumes (Dover, New York).

Pais, A.

- (1982) *Subtle is the Lord* (Oxford University Press, Oxford).

Panofsky, W. K. H. e Phillips, M.

- (1964) *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, Reading).

Pappas, P. T.

- (1983) Nuovo Cimento B, Vol. **76**, p. 189, "The original Ampère force and Biot-Savart and Lorentz forces."

Pappas, P. T. e Moyssides, P. G.

- (1985) Physics Letters A, Vol. **111**, p. 193, "On the fundamental laws of electrodynamics."

Phipps Jr., T. E.

- (1978) Speculations in Science and Technology, Vol. **1**, p. 499, "Should Mach's principle be taken seriously?"
- (1986) *Heretical Verities: Mathematical Themes in Physical Description* (Classic Non-Fiction Library, Urbana).
- (1990 a) Physics Essays, Vol. **3**, p. 198, "New evidence for Ampère longitudinal forces."
- (1990 b) Physics Essays, Vol. **3**, p. 414, "Toward modernization of Weber's force law."
- (1990 c) Apeiron, Vol. **8**, p. 8, "Weber-type laws of action-at-a-distance in modern physics."

Phipps, T. E. e Phipps Jr., T. E.

- (1990) Physics Letters A, Vol. **146**, p. 6, "Observation of Ampère forces in

mercury."

Poisson, S. D.

- (1811) Mémoires de l'Institut, Vol. **1**, p. 1, "Sur la distribuition de l'électricité à la surface des corps conducteurs."

- (1813) Bull. Soc. Phil., Vol. **3**, p. 388, "Remarques sur une équation qui se présent dans la théorie des attractions des sphéroides."

Purcell, E. M.

- (1965) *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course, Vol. 2; McGraw-Hill, New York).

Raine, D. J.

- (1981) Reports of Progress in Physics, Vol. **44**, p. 1151, "Mach's principle and space-time structure."

Rambaut, M. e Vigier, J. P.

- (1990) Physics Letters A, Vol. **148**, p. 229, "Ampère forces considered as collective non-relativistic limit of the sum of all Lorentz interactions acting on individual current elements: possible consequences for electromagnetic discharge stability and tokamak behaviour."

Reinhardt, M.

- (1973) Zeitschrift fur Naturforschung A, Vol. **28**, p. 529, "Mach's principle - a critical review."

Reitz, J. R. e Milford, F. J.

- (1967) *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison-Wesley, Reading).

Riemann, B.

- (1867) Philosophical Magazine, Vol. **34**, p. 368, "A contribution to electrodynamics." Este texto foi escrito pela primeira vez em 1858.

- (1977) em: C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field*

Theory (Campaigner, New York), p.177: "Gravity, electricity, and magnetism", p. 295: "A contribution to electrodynamics."

Roscoe, D. F.

- (1991 a) Galilean Electrodynamics, Vol. **2**, p. 87, "A geometric representation of inertial process."

- (1991 b) Galilean Electrodynamics, Vol. **2**, p. 103, "Gravitation as an inertial disturbance."

- (1991 c) Apeiron, Vol. **9-10**, p. 54, "Gravity out of inertia."

Rosenfeld, L.

- (1956) Nuovo Cimento, Vol. **4**, suplemento 5, p. 1630, "The velocity of light and the evolution of electrodynamics."

- (1973), em: *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillispie (editor), (Scribner, New York), Vol. **7**, p. 379, "Kirchhoff, Gustav Robert."

Rosser, W. G. V.

- (1964) *An Introduction to the Theory of Relativity* (Butterworths, London).

Sansbury, R.

- (1985) Review of Scientific Instruments, Vol. **56**, p. 415, "Detection of a force between a charged metal foil and a current-carrying conductor."

Schiff, L. I.

- (1964) Reviews of Modern Physics, Vol. **36**, p. 510, "Observational basis of Mach's principle."

Schwarzschild, K.

- (1903 a) Gottinger Nachrichten, p. 126, "Zwei Formen des princips der Kleinsten Action in der Elektronentheorie."

- (1903 b) ibid., p. 132, "Die elementare elektrodynamische Kraft."

- (1903 c) ibid., p. 245, "Ueber die Bewegung des Elektrons."

Sciama, D. W.

- (1953) Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. **113**, p. 34, "On the origin of inertia."

Sears, F. W.

- (1967) *Física*, Vol. 2 (Livro Técnico, Rio de Janeiro).

Sokol'skii, A. G. e Sadovnikov, A. A.

- (1987) Soviet Astronomy (Astronomical Journal), Vol. **31**, p. 90, "Lagrangian solutions for Weber's law of attraction."

Strnad, J.

- (1989) European Journal of Physics, Vol. **10**, p. 276, "Stefan's equations of electrodynamics."

Symon, K. R.

- (1971) *Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 3ª edição).

Thomson, J. J.

- (1881) Philosophical Magazine, Vol. **11**, p. 229, "On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies."
- (1885) Report of the British Association for the Advancement of Science (B. A. Report), p. 97, "Report on electrical theories."

Tipler, P. A.

- (1984) *Física*, Vol. 2a (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 2ª edição).

Treder, H. J.

- (1972) *Die Relativitat der Tragheit* (Akademie-Verlag, Berlin).

Treder, H. J., von Borzeszkowski, H. H., van der Merwe, A., e Yourgrau, W.

- (1980) *Fundamental Principles of General Relativity Theories* (Plenum, New York).

Tricker, R. A. R.

- (1962) Contemporary Physics, Vol. **3**, p. 453, "Ampère as a contemporary physicist."

- (1965) *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation* (Pergamon, New York).

Weber, W.

- (1846) Abhandlungen Leibnizens Gesellschaft (Leipzig), p. 316, "Elektrodynamische Maassbestimmungen uber ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung"; *Werke*, vol. 3, p. 25 (1893).

- (1848) Annalen der Physik, Vol. **73**, p. 193; Tradução para o inglês em R. Taylor (editor), "Scientific Memoirs", vol. 5, p. 489 (Johnson's Reprint Corporation, London, 1966), "On the measurement of electro-dynamic forces."

- (1849) "Bemerkungen zu Neumann's Theorie inducirter Strome"; ver *Werke*, vol. 3, p. 269 (1893).

- (1851) Annalen der Physik, Vol. **82**, p. 337; tradução para o inglês em Philosophical Magazine, Vol. **22**, págs. 226 e 261 (1861), "On the measurement of electric resistance according to an absolute standard ."

- (1852) "Electrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen"; ver *Werke*, vol. 3 , p. 301 (1893).

- (1864) "Electrodynamische Maassbestimmungen insbesondere uber elektrische Schwingungen"; ver *Werke*, vol. 4, p. 105 (1894).

- (1869) "Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung"; ver *Werke*, vol. 4, p. 243 (1894).

- (1871) Abhandlungen der mathem.- phys. Classe der Konigl. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vol. 10; tradução para o inglês em Philosophical Magazine, Vol. **43**, págs. 1 e 119 (1872), "Electrodynamic measurements relating specially to the principle of the conservation of energy."

- (1874) "Ueber das Aequivalent lebendiger Krafte"; ver *Werke*, vol. 4, p. 300 (1894).

- (1875) "Ueber die Bewegungen der Elektricitat in Korpern von molekularer Konstitution"; ver *Werke*, vol. 4, p. 312 (1894).

- (1878) "Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere uber die Energie der Wechselwirkung"; ver *Werke*, vol. 4, p. 361 (1894).

- (1894) "Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere uber den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetz mit dem Gravitationsgesetze"; ver *Werke*, vol. 4 , p. 479.

- (1894) "Weber Maassbestimmungen"; ver *Werke*, vol. 4, p. 539.

- (1892 a 1894) As obras completas de W. Weber podem ser encontradas nas *Werke* de Wilhelm Weber (Springer, Berlin): Vol. 1, *Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre*, W. Voigt (editor), (1892). Vol. 2, *Magnetismus*, E. Riecke (editor), (1892). Vol. 3, *Galvanismus und Elektrodynamik*, erster Theil, H. Weber (editor), (1893). Vol. 4, *Galvanismus und Elektrodynamik,* zweiter Theil, H. Weber (editor), (1894). Vol. 5, com E. H. Weber, *Wellenlehre auf Experimente gegrundet oder uber die Wellen tropfbarer Flussigkeiten mit Anwendung auf die Schall-und Lichtwellen*, E. Riecke (editor), (1893). Vol. 6, *Mechanik der Menschlichen Gehwerkzeuge*, F. Merkel e O. Fischer (editores), (1894).

Weber, W. e Zollner, J.

- (1880) "Ueber Einrichtungen zum Gebrauch absoluter Maasse in der Elektrodynamik mit praktischer Anwendung "; ver *Werke* de W. Weber, vol. 4, p. 420 (Berlin, 1894).

Werner, K. e Werner, K.

- (1976) *Wilhelm Weber* (Teubner, Leipzig).

Wesley, J. P.

- (1987 a) em: *Progress in Space Time Physics 1987*, J. P. Wesley (editor), (Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, Alemanha, 1987), p. 170, "Ampere's original force law compared with the Moyssides-Pappas results."

- (1987 b) Speculations in Science and Technology, Vol. **10**, p. 47, "Weber

electrodynamics extended to include radiation."

- (1990 a) em: *Proceedings of the Conference on the Foundations of Mathematics and Physics*, U. Bartocci e J. P. Wesley (editores), (Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, Alemanha, 1990), p. 289, "Evidence for Weber-Wesley electrodynamics."

- (1990 b) Foundations of Physics Letters, Vol. **3**, p. 443, "Weber electrodynamics, Part I: General theory, steady current effects"; ibid., p. 471, "Part II: Unipolar induction, Z-antenna"; ibid., p. 586, "Part III: Mechanics, gravitation."

- (1991) *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics* (Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, Alemanha).

Whitney, C. K.

- (1988) Physics Letters A, Vol. **128**, p. 232, "Current elements in relativistic field theory."

Whittaker, E. T.

- (1973) *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Volume 1: *The Classical Theories*, Volume 2: *The Modern Theories* (Humanities Press, New York).

Wiechert, E.

- (1900) Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles, Vol. **5**, p. 549, "Elektrodynamische Elementargesetze."

Wiederkehr, K. H.

- (1967) *Wilhelm Eduard Weber* - Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizitat, 1804-1891 (Grosse Naturforscher, Vol. 32, H. Degen (editor)); (Wissenschaftiche Verlagsgesellschaft, Stuttgart).

Wise, M. N.

- (1981) em: *Conceptions of Ether*; G. N. Cantor e M. J. S. Hodge (editores),

(Cambridge University Press, Cambridge), p. 269, "German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845-1880."

Woodruff, A. E.

- (1976) em: *Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillispie (editor), (Scribner, New York), Volume 14, p. 203, "Weber, Wilhelm Eduard."

Yourgrau, W. e van der Merwe, A.

- (1968) Synthese, Vol. **18**, p. 234, "Did Erns Mach 'miss the target'?"

Zahn, C. T. e Spees, A. H.

- (1938) Physical Review, Vol. **53**, p. 511, "A critical analysis of the classical experiments on the relativistic variation of electron mass."

Errata do livro Curso de Eletrodinâmica de Weber, de A. K. T. Assis (Instituto de Física da UNICAMP, Campinas, 1992)

- A equação (1.51) correta é:

$$fem = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\Phi_B = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

- A equação (3.21) correta é:

$$\nabla_2\left(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2\right) = -\frac{d\vec{\ell}_2}{r_{12}} + \left(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2\right)\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$+\frac{1}{r_{12}}\left[(x_1 - x_2)\nabla_2 d\ell_{2x} + (y_1 - y_2)\nabla_2 d\ell_{2y} + (z_1 - z_2)\nabla_2 d\ell_{2z}\right]$$

- Página 75, o texto da sétima linha deveria ser:

"(C) Use os exercícios 3.5 e 3.6 e aplique novamente ∇_1 em G para mostrar que (usando (3.22))"

- A equação (4.23) correta é:

$$\vec{v}_{2+} \equiv \frac{d\vec{r}_{2+}}{dt} = \vec{v}_{2+d}$$

- A equação (4.29) correta é:

$$fem_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\left\{2I_1\frac{(\vec{V} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}^2} - 3I_1\frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}^2}\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[I_1\frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}}\right] - I_1\frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)$$

$$\left.- I_1\frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)}{r_{12}}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2) + I_1\frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{\ell}_2)}{r_{12}^2}\frac{\partial r_{12}}{\partial t}\right\}$$

- Página 95, o texto da décima-terceira linha deveria ser:

“Uma distinção fundamental que ocorre entre as forças de Weber e de Lorentz é que enquanto a força de Weber depende da aceleração da carga de prova na forma $(\hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_1)\hat{r}_{12}$, a força de Lorentz não depende da aceleração $\vec{a}_1$ da carga de prova.”